

# شرح الباب الثاني المتابعات و المتسلسلات

إعداد الأستاذ /

طارق بن عامر آل سعدون الصيغري

# الدرس الأول : المتتابعات Sequences

## مقدمة :

تُستخدم كلمة المتتابعة — ويُطلق عليها أيضاً : ( متتالية أو متوالية ) — في حياتنا اليومية لتعني تتابع أشياء أو حوادث بنظام معين ، أما في الرياضيات فتعرف بأنها دالة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية و مجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية .  
وتعد من المواضيع الأساسية التي اعتمدها الإنسان وطبقها في حياته التجارية بالإضافة إلى استخدامها في كثير من العلوم الأخرى .

## نموذج :

تعطي إحدى الشركات موظفيها زيادات سنوية حسب الجدول التالي :

في نهاية السنة	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	الخامسة	السادسة	.....	الخامسة والعشرون
الزيادة بالريالات	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠	؟	.....	؟

لعلك لاحظت أنه على الرغم من أن الزيادة السنوية قليلة في البداية إلا أنها مشجعة مع الاستمرار في الخدمة مع الشركة ، كذلك لعلك لاحظت أن الزيادة تسير وفق قاعدة معينة ، حيث :  
الزيادة في

$$\text{السنة الأولى} = ١ \times ٢٠ ، \text{السنة الثانية} = ٢ \times ٢٠ ، \text{السنة الثالثة} = ٣ \times ٢٠$$

$$\text{السنة الرابعة} = ٤ \times ٢٠ ، \text{السنة الخامسة} = ٥ \times ٢٠$$

ماهي هذي القاعدة حتى نستنتج الزيادة في بقية السنوات ؟

$$\text{من الزيادات الواضحة في الجدول نلاحظ أن السنة السادسة} = ٦ \times ٢٠ = ١٢٠ .$$

يمكن أن نستنتج قانون الزيادة كالتالي :

$$\text{الزيادة السنوية} = ٢٠ \times \text{رتبة السنة الجديدة}$$

### نلاحظ من المثال السابق التالي :

- ① أن الزيادة السنوية تمثل متتالية حدودها : ( ٢٠ ، ٤٠ ، ٦٠ ، ..... )
- ② إذا كانت الشركة تنهي عمل موظفيها بعد خمس وعشرين سنة فستكون المتتالية منتهية .
- ③ أن السنة تمثل رتبة الحد في هذي المتتالية والزيادة تمثل قيمة الحد .

### نأخذ مثال آخر :

كرة سقطت من ارتفاع ٦٤ قدماً عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٧٥% من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض .  
احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع .

### الحل :

- بعد الاصطدام الأول يكون ارتفاع الكرة :  $64 \times \frac{75}{100} = 48$  قدماً .  
بعد الاصطدام الثاني يكون ارتفاع الكرة :  $48 \times \frac{75}{100} = 36$  قدماً .  
بعد الاصطدام الثالث يكون ارتفاع الكرة :  $36 \times \frac{75}{100} = 27$  قدماً .  
بعد الاصطدام الرابع يكون ارتفاع الكرة :  $27 \times \frac{75}{100} = 20.5$  قدماً .

### نلاحظ من المثال :

- ① لاحظ تتابع الارتفاعات : ( ٦٤ ، ٤٨ ، ٣٦ ، ٢٧ ، ٢٠.٥ )

$$\text{الارتفاع الأول} = ٦٤ = ١ \times ٦٤$$

$$\text{الارتفاع الأول} = ٤٨ = ٢ \times ٢٤$$

$$\text{الارتفاع الأول} = ٣٦ = ٣ \times ١٢$$

$$\text{الارتفاع الأول} = ٢٧ = ٤ \times ٦.٧٥$$

$$\text{الارتفاع الأول} = ٢٠.٥ = ٥ \times ٤.١$$

- ② أن رتبة الحد في المتتابعة أعداد طبيعية بينما قيمة الحد أعداد حقيقية كذلك كما في المثال السابق .

**على ضوء هذين المثالين كيف نعرف المتتابعة وما هي عناصرها .**

## تعريف المتتابعة :

المتتابعة عبارة عن دالة مجالها  $\mathbb{P}$  أو مجموعة جزئية منها ، ومدائها مجموعة جزئية من  $\mathbb{C}$  .  
عناصر المدى تسمى بحدود المتتابعة .

وإذا كانت  $n \in \mathbb{P}$  فإن  $d(n)$  ، أو  $p_n$  يسمى بالحد النوني للمتتابعة .

## مثال نوضح به التعريف :

اعتبر متتابعة الأعداد :  $( ٢ ، ٤ ، ٦ ، ..... )$   
في هذه المتتابعة :

نسمي : ٢ الحد الأول ويرمز له بالرمز :  $p_1$

نسمي : ٤ الحد الثاني ويرمز له بالرمز :  $p_2$

نسمي : ٦ الحد الثالث ويرمز له بالرمز :  $p_3$

ويرمز إلى الحد النوني في هذي المتتابعة بالرمز :  $p_n$

## ماذا نعني بالحد العام للمتتابعة ؟

هو الحد الذي يمثل جميع الحدود في المتتابعة وعن طريقة نستنتج أي حد نريده .

## كيف نستنتج الحد العام ؟

طبعاً استنتاج الحد العام ليس بالأمر السهل فيحتاج إلى مراس وصبر .

المتتابعة في الأعلى هي متتابعة الأعداد الزوجية والحد العام لها مشهور عند الجميع  $= ٢n$  ،  
 $n \in \mathbb{P}$

فعند :  $n = ١ \Leftarrow$  الحد الأول  $= ٢$  ،  $n = ٢ \Leftarrow$  الحد الأول  $= ٤$

$n = ٣ \Leftarrow$  الحد الأول  $= ٦$  ،  $n = ١٢ \Leftarrow$  الحد الأول  $= ٢٤$  وهكذا

## وسيلاني مزيد نوضحه وأمثلة في استنتاج الحد العام .

## كتابة المتتابعة :

① بأزواج مرتبة  $\{ (١, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), \dots \}$   
أو  $\{ (١, ١), (٢, ٢), (٣, ٣), (٤, ٤), \dots \}$

② بكتابة حدودها الأولى ( بطريقة السرد ) :  $(١, ٢, ٣, ٤, \dots)$  .

③ بكتابة حدها النوني بين قوسين هكذا :  $\{ ١, ٢, ٣, ٤, \dots \}$

ونستخدم عادة الطريقتين الأخيرتين في دراستنا هذه .

## ملاحظات :

- ① تكون المتتابعة منتهية إذا كان لها حد أخير مثل :  $(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨, ٩)$
  - ② تكون المتتابعة غير منتهية إذا كان ليس لها حد أخير مثل :  $(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, \dots)$
  - ③ ليس من الضروري اختلاف حدود المتتابعة مثل :  $(١, ٢, ٣, ٣, ٣, ٣, ٣, \dots)$
  - ④ لا يشترط وجود قاعدة للمتتابعة ( قانون معين للحد العام ) مثل :  $(١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦, \dots)$
  - ⑤ المراد بالحد النوني  $\{ ١, ٢, ٣, ٤, \dots \}$  للمتتابعة هو قانون فك المتتابعة إلى عناصرها
  - ⑥ يرمز للحد النوني بأحد الرموز التالية :  $١, ٢, ٣, ٤, \dots$  ، وهكذا .
  - ⑦ في الحد النوني  $١, ٢, ٣, ٤, \dots$  ، يسمى  $١$  : رتبة الحد ، فمثلاً :  $(١, ٢, ٣, ٤, \dots)$  =  $١, ٢, ٣, ٤, \dots$
- نسمي :  $١$  : الحد الأول . ،  $٢$  : الحد الثاني . ،  $٣$  : الحد الثالث . وهكذا .

## تعريف متابعيتين :

تكون المتابعتان  $\{ \sim p \}$  ،  $\{ \sim b \}$  متساويتين إذا توفر الشرط التالي :  
 $\sim p = \sim b \forall \sim \exists ط ، أي أن : \sim p = \sim b ، \sim b = \sim p ، \sim p = \sim b ، .....$

## تمثيل المتابعة بيانياً :

تمثل المتابعة بيانياً في المستوى الديكارتي كمجموعة من النقط المفصلة وتكون دائماً على يمين المحور الصادي .

## مثال :

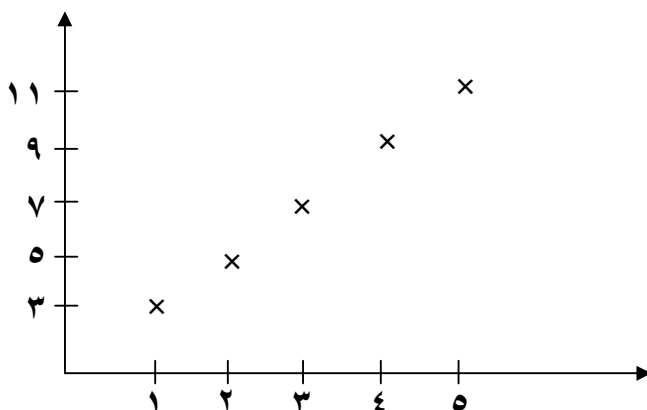
اكتب الحدود الخمسة الأولى من حدود المتابعة ، ثم مثلها بيانياً في المستوى الإحداثي :

$$(p) \{ \sim p \}_{\sim=1}^{\infty} \text{ حيث : } \sim p = \sim 2 + 1 .$$

## الحل :

$$(p) \{ \sim p \}_{\sim=1}^{\infty} = (3, 5, 7, 9, 11, \dots)$$

5	4	3	2	1	$\sim$
11	9	7	5	3	$\sim p$
(11, 5)	(9, 4)	(7, 3)	(5, 2)	(3, 1)	( $\sim p, \sim$ )



## قاعدة إشارات حدود المتتابعة :

① إذا كانت حدود المتتابعة تتغير بالصورة التالية : ( + ، - ، + ، - ، ..... ) البداية موجبة  
فإن الحد النوني لهذا التغير هو :  $u_n(1 - ) = p$  أو  $u_n(1 - ) = p$  ،  $\exists p$  .

② إذا كانت حدود المتتابعة تتغير بالصورة التالية : ( - ، + ، - ، + ، ..... ) البداية سالبة  
فإن الحد النوني لهذا التغير هو :  $u_n(1 - ) = p$  .

## أمثلة على الورس :

### مثال ( ١ ) :

فك المتتابعة التالية :  $\{ u_n \times u_n(1 - ) \}_{n=1}^{\infty}$

واضح أن :  $1 - = 1 \times 1(1 - ) = p$  ،  $2 - = 2 \times 1(1 - ) = p$  ،  $3 - = 3 \times 1(1 - ) = p$  ، ....

$$\{ u_n \}_{n=1}^{\infty} = ( 1 - ، 2 - ، 3 - ، 4 - ، ..... )$$

### مثال ( ٢ ) :

② استنتج الحد النوني للمتتابعة التالية :  $( \frac{1}{3} - ، \frac{1}{4} - ، \frac{1}{5} - ، ..... )$  .

المتتابعة غير منتهية و إشارتها تتعاقب ابتداءً بالموجب وأيضاً التغير في المقام حيث :

$$\frac{1}{3} - = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(1 - ) = p ، \quad \frac{1}{4} - = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}(1 - ) = p$$

$$\frac{1}{5} - = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5}(1 - ) = p ، ..... ، \frac{1}{n} - = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}(1 - ) = p$$

$$\{ u_n \}_{n=1}^{\infty} : \text{ حيث } u_n \times u_n(1 - ) = p$$

**مثال ( ٣ ) :** استنتج الحد النوني لكل متتابعة مما يلي :

( ٢ ) ( ١ ،  $\frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{3}$  ،  $\frac{1}{4}$  ، ..... )

( ب ) ( ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ..... )

( ج ) ( ٤ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ..... )

**الحل :**

( ٢ ) واضح من المتتابعة أنها غير منتهية وأن :  $\frac{1}{1} = ١$  ،  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$  ،  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  ، ..... ،  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \Leftarrow$  حيث  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$  ،  $\exists \epsilon > 0$  .

( ب ) واضح من المتتابعة أنها غير منتهية وأن :

$٨ = ١$  ،  $١١ = ٢$  ،  $١٤ = ٣$  ،  $١٧ = ٤$  ، ..... ،  $٥ + ١ \times ٣ = ٨ = ١$  ،  $٥ + ٢ \times ٣ = ١١ = ٢$  ،  $٥ + ٣ \times ٣ = ١٤ = ٣$  ، ..... ،  $٥ + n \times ٣ = \frac{1}{n}$

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \Leftarrow$  حيث  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$  ،  $\exists \epsilon > 0$  .

( ج ) واضح من المتتابعة أنها غير منتهية وأن :

$٤ = ١$  ،  $٧ = ٢$  ،  $١٢ = ٣$  ، ..... ،  $٣ + ١ = ٤ = ١$  ،  $٣ + ٢ = ٧ = ٢$  ،  $٣ + ٣ = ١٢ = ٣$  ، ..... ،  $٣ + n = \frac{1}{n}$

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \Leftarrow$  حيث  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$  :  $٣ + n = \frac{1}{n}$  .

وأكرر أن استنتاج الحد النوني بالذات للمتتابعات غير المشهورة ليس بالأمر السهل ولكن بكثرة حل المسائل يستطيع الطالب امتلاك هذه المهارة .



## تمارين على الدرس :

١ استنتج الحد النوني لكل متتابعة مما يلي ، ثم أوجد الحد العاشر :

① ( ١ ، ٢ ، ٦ ، ٢٤ ، ١٢٠ ، ..... )

② ( ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ..... )

③ ( ٠ ، ٣ ، ٨ ، ١٥ ، ..... )

④ (  $\frac{1}{6}$  ، ٠ ،  $-\frac{1}{6}$  ،  $-\frac{1}{6}$  ، ..... )

⑤ ( ٢ ،  $2(\frac{2}{3})$  ،  $3(\frac{4}{3})$  ،  $4(\frac{5}{4})$  ، ..... )

٢ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعات :

①  $\frac{u}{1+u} = u^p$

②  $\frac{u(1-)}{u(2)} = u^p$

٣ أوجد :  $u^p$  ،  $u^p$  ،  $u^p$  حيث :  $u^p = 1$  ،  $u^p = 1$  وكان :

$$u^p + u^{p-1} = u^p$$

## حل تمارين على الدرس :

١ استنتج الحد النوني لكل متتابعة مما يلي ، ثم أوجد الحد العاشر :

$$① ( \dots\dots\dots , ١٢٠ , ٢٤ , ٦ , ٢ , ١ )$$

$$② ( \dots\dots\dots , ١٥ , ١٠ , ٦ , ٣ , ١ )$$

$$③ ( \dots\dots\dots , ١٥ , ٨ , ٣ , ٠ )$$

$$④ ( \dots\dots\dots , ١ - , \frac{1}{2} - , ٠ , \frac{1}{2} )$$

$$⑤ ( \dots\dots\dots , ٤(\frac{5}{4}) , ٣(\frac{4}{3}) , ٢(\frac{3}{2}) , ٢ )$$

الحل :

$$① ( \dots\dots\dots , ١٢٠ , ٢٤ , ٦ , ٢ , ١ )$$

واضح أن :

$$١! = ١ \times ١ = ١ , ٢! = ٢ \times ١ = ٢ , ٣! = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$$

$$٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤ , ٥! = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$$

$$\therefore \text{الحد النوني} = ٦! = ٧٢٠$$

$$② ( \dots\dots\dots , ١٥ , ١٠ , ٦ , ٣ , ١ )$$

واضح أن :

هذه المتتابعة من المتتابعات المشهورة وهي متتابعة الأعداد المثلثية و الحد النوني :

$$\frac{1}{2} (n + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3) (0, 3, 8, 15, \dots)$$

واضح أن :

$$\begin{aligned} 1 - 2 \times 2 = 3 = 1^2, \quad 1 - 1 \times 1 = 0 = 0^2 \\ 1 - 4 \times 4 = 15 = 3^2, \quad 1 - 3 \times 3 = 8 = 2^2 \\ \therefore \text{الحد النوني} = 1 - n^2 \end{aligned}$$

$$(4) (0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots)$$

واضح أن :

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 0 = 0^2, \quad 1 \times \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -0.5^2 \\ 3 \times \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} = 0.5^2, \quad 4 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 = 1^2 \\ \therefore \text{الحد النوني} = 1 - n^2 \end{aligned}$$

وأكرر مرة أخرى أن استنتاج الحد النوني بالذات للمتتابعات غير المشهورة ليس بالأمر السهل ولكن بكثرة حل المسائل يستطيع الطالب امتلاك هذه المهارة .

٢ اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعات :

$$\frac{u(1-)}{u(2)} = u^p \textcircled{2} \quad \frac{u}{1+u} = u^p \textcircled{1}$$

الحل:

$$\frac{u}{1+u} = u^p \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} = u^p, \quad \frac{2}{3} = u^p, \quad \frac{3}{4} = u^p, \quad \frac{4}{5} = u^p, \quad \frac{5}{6} = u^p$$

$$\frac{u(1-)}{u(2)} = u^p \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{3} = u^p, \quad \frac{1}{4} = u^p, \quad \frac{1}{5} = u^p, \quad \frac{1}{6} = u^p, \quad \frac{1}{7} = u^p$$

٣ أوجد :  $u^p, u^p, u^p$  حيث :  $u^p = 1, u^p = 1$  وكان :

$$u^p + u^p = u^p$$

الحل:

$$u^p + u^p = u^p :$$

$$2 = u^p \Leftarrow 2 = 1 + 1 = u^p + u^p = u^p + u^p = u^p$$

$$3 = u^p \Leftarrow 3 = 1 + 2 = u^p + u^p = u^p + u^p = u^p$$

$$5 = u^p \Leftarrow 5 = 2 + 3 = u^p + u^p = u^p + u^p = u^p$$

وهذه المتتالية تدعى متتالية فيبوناتشي ( Fibonacci Sequence )

وقاعدتها أي حد = حاصل جمع الحدين السابقين له

## الدرس الثاني : المتتابعات الحسابية ( Arithmetic Sequence )

### نوهية :

يبين الجدول التالي المسافة بالأمطار التي يقطعها جسم يسير في مسار أفقي في أزمنة مختلفة معطاة بالثواني :

الزمن بالثواني	١	٢	٣	٤	٥	٦	.....
المسافة بالأمطار	١٦	٤٨	٨٠	١١٢	١٤٤	١٧٦	.....

نلاحظ أن المسافات : ( ١٦ ، ٤٨ ، ٨٠ ، ١١٢ ، ١٤٤ ، ١٧٦ ، .... ) تشكل متتالية ،

وإذا لاحظت الفرق بين كل حد والحد السابق تجده قيمة ثابتة = ٣٢ ، حيث :

$$٣٢ = ١٦ - ٤٨ = ٤٨ - ٨٠ = ٨٠ - ١١٢ = ١١٢ - ١٤٤ = ١٤٤ - ١٧٦ = ١٧٦ - ٢٠٨ = ٢٠٨ - ٢٤٠ = ٢٤٠ - ٢٧٢ = ٢٧٢ - ٣٠٤ = ٣٠٤ - ٣٣٦ = ٣٣٦ - ٣٦٨ = ٣٦٨ - ٤٠٠ = ٤٠٠ - ٤٣٢ = ٤٣٢ - ٤٦٤ = ٤٦٤ - ٤٩٦ = ٤٩٦ - ٥٢٨ = ٥٢٨ - ٥٦٠ = ٥٦٠ - ٥٩٢ = ٥٩٢ - ٦٢٤ = ٦٢٤ - ٦٥٦ = ٦٥٦ - ٦٨٨ = ٦٨٨ - ٧٢٠ = ٧٢٠ - ٧٥٢ = ٧٥٢ - ٧٨٤ = ٧٨٤ - ٨١٦ = ٨١٦ - ٨٤٨ = ٨٤٨ - ٨٨٠ = ٨٨٠ - ٩١٢ = ٩١٢ - ٩٤٤ = ٩٤٤ - ٩٧٦ = ٩٧٦ - ١٠٠٨ = ١٠٠٨ - ١٠٤٠ = ١٠٤٠ - ١٠٧٢ = ١٠٧٢ - ١١٠٤ = ١١٠٤ - ١١٣٦ = ١١٣٦ - ١١٦٨ = ١١٦٨ - ١٢٠٠ = ١٢٠٠ - ١٢٣٢ = ١٢٣٢ - ١٢٦٤ = ١٢٦٤ - ١٢٩٦ = ١٢٩٦ - ١٣٢٨ = ١٣٢٨ - ١٣٦٠ = ١٣٦٠ - ١٣٩٢ = ١٣٩٢ - ١٤٢٤ = ١٤٢٤ - ١٤٥٦ = ١٤٥٦ - ١٤٨٨ = ١٤٨٨ - ١٥٢٠ = ١٥٢٠ - ١٥٥٢ = ١٥٥٢ - ١٥٨٤ = ١٥٨٤ - ١٦١٦ = ١٦١٦ - ١٦٤٨ = ١٦٤٨ - ١٦٨٠ = ١٦٨٠ - ١٧١٢ = ١٧١٢ - ١٧٤٤ = ١٧٤٤ - ١٧٧٦ = ١٧٧٦ - ١٨٠٨ = ١٨٠٨ - ١٨٤٠ = ١٨٤٠ - ١٨٧٢ = ١٨٧٢ - ١٩٠٤ = ١٩٠٤ - ١٩٣٦ = ١٩٣٦ - ١٩٦٨ = ١٩٦٨ - ٢٠٠٠ = ٢٠٠٠ - ٢٠٣٢ = ٢٠٣٢ - ٢٠٦٤ = ٢٠٦٤ - ٢٠٩٦ = ٢٠٩٦ - ٢١٢٨ = ٢١٢٨ - ٢١٦٠ = ٢١٦٠ - ٢١٩٢ = ٢١٩٢ - ٢٢٢٤ = ٢٢٢٤ - ٢٢٥٦ = ٢٢٥٦ - ٢٢٨٨ = ٢٢٨٨ - ٢٣٢٠ = ٢٣٢٠ - ٢٣٥٢ = ٢٣٥٢ - ٢٣٨٤ = ٢٣٨٤ - ٢٤١٦ = ٢٤١٦ - ٢٤٤٨ = ٢٤٤٨ - ٢٤٨٠ = ٢٤٨٠ - ٢٥١٢ = ٢٥١٢ - ٢٥٤٤ = ٢٥٤٤ - ٢٥٧٦ = ٢٥٧٦ - ٢٦٠٨ = ٢٦٠٨ - ٢٦٤٠ = ٢٦٤٠ - ٢٦٧٢ = ٢٦٧٢ - ٢٧٠٤ = ٢٧٠٤ - ٢٧٣٦ = ٢٧٣٦ - ٢٧٦٨ = ٢٧٦٨ - ٢٨٠٠ = ٢٨٠٠ - ٢٨٣٢ = ٢٨٣٢ - ٢٨٦٤ = ٢٨٦٤ - ٢٨٩٦ = ٢٨٩٦ - ٢٩٢٨ = ٢٩٢٨ - ٢٩٦٠ = ٢٩٦٠ - ٢٩٩٢ = ٢٩٩٢ - ٣٠٢٤ = ٣٠٢٤ - ٣٠٥٦ = ٣٠٥٦ - ٣٠٨٨ = ٣٠٨٨ - ٣١٢٠ = ٣١٢٠ - ٣١٥٢ = ٣١٥٢ - ٣١٨٤ = ٣١٨٤ - ٣٢١٦ = ٣٢١٦ - ٣٢٤٨ = ٣٢٤٨ - ٣٢٨٠ = ٣٢٨٠ - ٣٣١٢ = ٣٣١٢ - ٣٣٤٤ = ٣٣٤٤ - ٣٣٧٦ = ٣٣٧٦ - ٣٤٠٨ = ٣٤٠٨ - ٣٤٤٠ = ٣٤٤٠ - ٣٤٧٢ = ٣٤٧٢ - ٣٥٠٤ = ٣٥٠٤ - ٣٥٣٦ = ٣٥٣٦ - ٣٥٦٨ = ٣٥٦٨ - ٣٦٠٠ = ٣٦٠٠ - ٣٦٣٢ = ٣٦٣٢ - ٣٦٦٤ = ٣٦٦٤ - ٣٦٩٦ = ٣٦٩٦ - ٣٧٢٨ = ٣٧٢٨ - ٣٧٦٠ = ٣٧٦٠ - ٣٧٩٢ = ٣٧٩٢ - ٣٨٢٤ = ٣٨٢٤ - ٣٨٥٦ = ٣٨٥٦ - ٣٨٨٨ = ٣٨٨٨ - ٣٩٢٠ = ٣٩٢٠ - ٣٩٥٢ = ٣٩٥٢ - ٣٩٨٤ = ٣٩٨٤ - ٤٠١٦ = ٤٠١٦ - ٤٠٤٨ = ٤٠٤٨ - ٤٠٨٠ = ٤٠٨٠ - ٤١١٢ = ٤١١٢ - ٤١٤٤ = ٤١٤٤ - ٤١٧٦ = ٤١٧٦ - ٤٢٠٨ = ٤٢٠٨ - ٤٢٤٠ = ٤٢٤٠ - ٤٢٧٢ = ٤٢٧٢ - ٤٣٠٤ = ٤٣٠٤ - ٤٣٣٦ = ٤٣٣٦ - ٤٣٦٨ = ٤٣٦٨ - ٤٤٠٠ = ٤٤٠٠ - ٤٤٣٢ = ٤٤٣٢ - ٤٤٦٤ = ٤٤٦٤ - ٤٤٩٦ = ٤٤٩٦ - ٤٥٢٨ = ٤٥٢٨ - ٤٥٦٠ = ٤٥٦٠ - ٤٥٩٢ = ٤٥٩٢ - ٤٦٢٤ = ٤٦٢٤ - ٤٦٥٦ = ٤٦٥٦ - ٤٦٨٨ = ٤٦٨٨ - ٤٧٢٠ = ٤٧٢٠ - ٤٧٥٢ = ٤٧٥٢ - ٤٧٨٤ = ٤٧٨٤ - ٤٨١٦ = ٤٨١٦ - ٤٨٤٨ = ٤٨٤٨ - ٤٨٨٠ = ٤٨٨٠ - ٤٩١٢ = ٤٩١٢ - ٤٩٤٤ = ٤٩٤٤ - ٤٩٧٦ = ٤٩٧٦ - ٥٠٠٨ = ٥٠٠٨ - ٥٠٤٠ = ٥٠٤٠ - ٥٠٧٢ = ٥٠٧٢ - ٥١٠٤ = ٥١٠٤ - ٥١٣٦ = ٥١٣٦ - ٥١٦٨ = ٥١٦٨ - ٥٢٠٠ = ٥٢٠٠ - ٥٢٣٢ = ٥٢٣٢ - ٥٢٦٤ = ٥٢٦٤ - ٥٢٩٦ = ٥٢٩٦ - ٥٣٢٨ = ٥٣٢٨ - ٥٣٦٠ = ٥٣٦٠ - ٥٣٩٢ = ٥٣٩٢ - ٥٤٢٤ = ٥٤٢٤ - ٥٤٥٦ = ٥٤٥٦ - ٥٤٨٨ = ٥٤٨٨ - ٥٥٢٠ = ٥٥٢٠ - ٥٥٥٢ = ٥٥٥٢ - ٥٥٨٤ = ٥٥٨٤ - ٥٦١٦ = ٥٦١٦ - ٥٦٤٨ = ٥٦٤٨ - ٥٦٨٠ = ٥٦٨٠ - ٥٧١٢ = ٥٧١٢ - ٥٧٤٤ = ٥٧٤٤ - ٥٧٧٦ = ٥٧٧٦ - ٥٨٠٨ = ٥٨٠٨ - ٥٨٤٠ = ٥٨٤٠ - ٥٨٧٢ = ٥٨٧٢ - ٥٩٠٤ = ٥٩٠٤ - ٥٩٣٦ = ٥٩٣٦ - ٥٩٦٨ = ٥٩٦٨ - ٦٠٠٠ = ٦٠٠٠ - ٦٠٣٢ = ٦٠٣٢ - ٦٠٦٤ = ٦٠٦٤ - ٦٠٩٦ = ٦٠٩٦ - ٦١٢٨ = ٦١٢٨ - ٦١٦٠ = ٦١٦٠ - ٦١٩٢ = ٦١٩٢ - ٦٢٢٤ = ٦٢٢٤ - ٦٢٥٦ = ٦٢٥٦ - ٦٢٨٨ = ٦٢٨٨ - ٦٣٢٠ = ٦٣٢٠ - ٦٣٥٢ = ٦٣٥٢ - ٦٣٨٤ = ٦٣٨٤ - ٦٤١٦ = ٦٤١٦ - ٦٤٤٨ = ٦٤٤٨ - ٦٤٨٠ = ٦٤٨٠ - ٦٥١٢ = ٦٥١٢ - ٦٥٤٤ = ٦٥٤٤ - ٦٥٧٦ = ٦٥٧٦ - ٦٦٠٨ = ٦٦٠٨ - ٦٦٤٠ = ٦٦٤٠ - ٦٦٧٢ = ٦٦٧٢ - ٦٧٠٤ = ٦٧٠٤ - ٦٧٣٦ = ٦٧٣٦ - ٦٧٦٨ = ٦٧٦٨ - ٦٨٠٠ = ٦٨٠٠ - ٦٨٣٢ = ٦٨٣٢ - ٦٨٦٤ = ٦٨٦٤ - ٦٨٩٦ = ٦٨٩٦ - ٦٩٢٨ = ٦٩٢٨ - ٦٩٦٠ = ٦٩٦٠ - ٦٩٩٢ = ٦٩٩٢ - ٧٠٢٤ = ٧٠٢٤ - ٧٠٥٦ = ٧٠٥٦ - ٧٠٨٨ = ٧٠٨٨ - ٧١٢٠ = ٧١٢٠ - ٧١٥٢ = ٧١٥٢ - ٧١٨٤ = ٧١٨٤ - ٧٢١٦ = ٧٢١٦ - ٧٢٤٨ = ٧٢٤٨ - ٧٢٨٠ = ٧٢٨٠ - ٧٣١٢ = ٧٣١٢ - ٧٣٤٤ = ٧٣٤٤ - ٧٣٧٦ = ٧٣٧٦ - ٧٤٠٨ = ٧٤٠٨ - ٧٤٤٠ = ٧٤٤٠ - ٧٤٧٢ = ٧٤٧٢ - ٧٥٠٤ = ٧٥٠٤ - ٧٥٣٦ = ٧٥٣٦ - ٧٥٦٨ = ٧٥٦٨ - ٧٦٠٠ = ٧٦٠٠ - ٧٦٣٢ = ٧٦٣٢ - ٧٦٦٤ = ٧٦٦٤ - ٧٦٩٦ = ٧٦٩٦ - ٧٧٢٨ = ٧٧٢٨ - ٧٧٦٠ = ٧٧٦٠ - ٧٧٩٢ = ٧٧٩٢ - ٧٨٢٤ = ٧٨٢٤ - ٧٨٥٦ = ٧٨٥٦ - ٧٨٨٨ = ٧٨٨٨ - ٧٩٢٠ = ٧٩٢٠ - ٧٩٥٢ = ٧٩٥٢ - ٧٩٨٤ = ٧٩٨٤ - ٨٠١٦ = ٨٠١٦ - ٨٠٤٨ = ٨٠٤٨ - ٨٠٨٠ = ٨٠٨٠ - ٨١١٢ = ٨١١٢ - ٨١٤٤ = ٨١٤٤ - ٨١٧٦ = ٨١٧٦ - ٨٢٠٨ = ٨٢٠٨ - ٨٢٤٠ = ٨٢٤٠ - ٨٢٧٢ = ٨٢٧٢ - ٨٣٠٤ = ٨٣٠٤ - ٨٣٣٦ = ٨٣٣٦ - ٨٣٦٨ = ٨٣٦٨ - ٨٤٠٠ = ٨٤٠٠ - ٨٤٣٢ = ٨٤٣٢ - ٨٤٦٤ = ٨٤٦٤ - ٨٤٩٦ = ٨٤٩٦ - ٨٥٢٨ = ٨٥٢٨ - ٨٥٦٠ = ٨٥٦٠ - ٨٥٩٢ = ٨٥٩٢ - ٨٦٢٤ = ٨٦٢٤ - ٨٦٥٦ = ٨٦٥٦ - ٨٦٨٨ = ٨٦٨٨ - ٨٧٢٠ = ٨٧٢٠ - ٨٧٥٢ = ٨٧٥٢ - ٨٧٨٤ = ٨٧٨٤ - ٨٨١٦ = ٨٨١٦ - ٨٨٤٨ = ٨٨٤٨ - ٨٨٨٠ = ٨٨٨٠ - ٨٩١٢ = ٨٩١٢ - ٨٩٤٤ = ٨٩٤٤ - ٨٩٧٦ = ٨٩٧٦ - ٩٠٠٨ = ٩٠٠٨ - ٩٠٤٠ = ٩٠٤٠ - ٩٠٧٢ = ٩٠٧٢ - ٩١٠٤ = ٩١٠٤ - ٩١٣٦ = ٩١٣٦ - ٩١٦٨ = ٩١٦٨ - ٩٢٠٠ = ٩٢٠٠ - ٩٢٣٢ = ٩٢٣٢ - ٩٢٦٤ = ٩٢٦٤ - ٩٢٩٦ = ٩٢٩٦ - ٩٣٢٨ = ٩٣٢٨ - ٩٣٦٠ = ٩٣٦٠ - ٩٣٩٢ = ٩٣٩٢ - ٩٤٢٤ = ٩٤٢٤ - ٩٤٥٦ = ٩٤٥٦ - ٩٤٨٨ = ٩٤٨٨ - ٩٥٢٠ = ٩٥٢٠ - ٩٥٥٢ = ٩٥٥٢ - ٩٥٨٤ = ٩٥٨٤ - ٩٦١٦ = ٩٦١٦ - ٩٦٤٨ = ٩٦٤٨ - ٩٦٨٠ = ٩٦٨٠ - ٩٧١٢ = ٩٧١٢ - ٩٧٤٤ = ٩٧٤٤ - ٩٧٧٦ = ٩٧٧٦ - ٩٨٠٨ = ٩٨٠٨ - ٩٨٤٠ = ٩٨٤٠ - ٩٨٧٢ = ٩٨٧٢ - ٩٩٠٤ = ٩٩٠٤ - ٩٩٣٦ = ٩٩٣٦ - ٩٩٦٨ = ٩٩٦٨ - ١٠٠٠٠ = ١٠٠٠٠ - ١٠٠٣٢ = ١٠٠٣٢ - ١٠٠٦٤ = ١٠٠٦٤ - ١٠٠٩٦ = ١٠٠٩٦ - ١٠١٢٨ = ١٠١٢٨ - ١٠١٦٠ = ١٠١٦٠ - ١٠١٩٢ = ١٠١٩٢ - ١٠٢٢٤ = ١٠٢٢٤ - ١٠٢٥٦ = ١٠٢٥٦ - ١٠٢٨٨ = ١٠٢٨٨ - ١٠٣٢٠ = ١٠٣٢٠ - ١٠٣٥٢ = ١٠٣٥٢ - ١٠٣٨٤ = ١٠٣٨٤ - ١٠٤١٦ = ١٠٤١٦ - ١٠٤٤٨ = ١٠٤٤٨ - ١٠٤٨٠ = ١٠٤٨٠ - ١٠٥١٢ = ١٠٥١٢ - ١٠٥٤٤ = ١٠٥٤٤ - ١٠٥٧٦ = ١٠٥٧٦ - ١٠٦٠٨ = ١٠٦٠٨ - ١٠٦٤٠ = ١٠٦٤٠ - ١٠٦٧٢ = ١٠٦٧٢ - ١٠٧٠٤ = ١٠٧٠٤ - ١٠٧٣٦ = ١٠٧٣٦ - ١٠٧٦٨ = ١٠٧٦٨ - ١٠٨٠٠ = ١٠٨٠٠ - ١٠٨٣٢ = ١٠٨٣٢ - ١٠٨٦٤ = ١٠٨٦٤ - ١٠٨٩٦ = ١٠٨٩٦ - ١٠٩٢٨ = ١٠٩٢٨ - ١٠٩٦٠ = ١٠٩٦٠ - ١٠٩٩٢ = ١٠٩٩٢ - ١١٠٢٤ = ١١٠٢٤ - ١١٠٥٦ = ١١٠٥٦ - ١١٠٨٨ = ١١٠٨٨ - ١١١٢٠ = ١١١٢٠ - ١١١٥٢ = ١١١٥٢ - ١١١٨٤ = ١١١٨٤ - ١١٢١٦ = ١١٢١٦ - ١١٢٤٨ = ١١٢٤٨ - ١١٢٨٠ = ١١٢٨٠ - ١١٣١٢ = ١١٣١٢ - ١١٣٤٤ = ١١٣٤٤ - ١١٣٧٦ = ١١٣٧٦ - ١١٤٠٨ = ١١٤٠٨ - ١١٤٤٠ = ١١٤٤٠ - ١١٤٧٢ = ١١٤٧٢ - ١١٥٠٤ = ١١٥٠٤ - ١١٥٣٦ = ١١٥٣٦ - ١١٥٦٨ = ١١٥٦٨ - ١١٦٠٠ = ١١٦٠٠ - ١١٦٣٢ = ١١٦٣٢ - ١١٦٦٤ = ١١٦٦٤ - ١١٦٩٦ = ١١٦٩٦ - ١١٧٢٨ = ١١٧٢٨ - ١١٧٦٠ = ١١٧٦٠ - ١١٧٩٢ = ١١٧٩٢ - ١١٨٢٤ = ١١٨٢٤ - ١١٨٥٦ = ١١٨٥٦ - ١١٨٨٨ = ١١٨٨٨ - ١١٩٢٠ = ١١٩٢٠ - ١١٩٥٢ = ١١٩٥٢ - ١١٩٨٤ = ١١٩٨٤ - ١٢٠١٦ = ١٢٠١٦ - ١٢٠٤٨ = ١٢٠٤٨ - ١٢٠٨٠ = ١٢٠٨٠ - ١٢١١٢ = ١٢١١٢ - ١٢١٤٤ = ١٢١٤٤ - ١٢١٧٦ = ١٢١٧٦ - ١٢٢٠٨ = ١٢٢٠٨ - ١٢٢٤٠ = ١٢٢٤٠ - ١٢٢٧٢ = ١٢٢٧٢ - ١٢٣٠٤ = ١٢٣٠٤ - ١٢٣٣٦ = ١٢٣٣٦ - ١٢٣٦٨ = ١٢٣٦٨ - ١٢٤٠٠ = ١٢٤٠٠ - ١٢٤٣٢ = ١٢٤٣٢ - ١٢٤٦٤ = ١٢٤٦٤ - ١٢٤٩٦ = ١٢٤٩٦ - ١٢٥٢٨ = ١٢٥٢٨ - ١٢٥٦٠ = ١٢٥٦٠ - ١٢٥٩٢ = ١٢٥٩٢ - ١٢٦٢٤ = ١٢٦٢٤ - ١٢٦٥٦ = ١٢٦٥٦ - ١٢٦٨٨ = ١٢٦٨٨ - ١٢٧٢٠ = ١٢٧٢٠ - ١٢٧٥٢ = ١٢٧٥٢ - ١٢٧٨٤ = ١٢٧٨٤ - ١٢٨١٦ = ١٢٨١٦ - ١٢٨٤٨ = ١٢٨٤٨ - ١٢٨٨٠ = ١٢٨٨٠ - ١٢٩١٢ = ١٢٩١٢ - ١٢٩٤٤ = ١٢٩٤٤ - ١٢٩٧٦ = ١٢٩٧٦ - ١٣٠٠٨ = ١٣٠٠٨ - ١٣٠٤٠ = ١٣٠٤٠ - ١٣٠٧٢ = ١٣٠٧٢ - ١٣١٠٤ = ١٣١٠٤ - ١٣١٣٦ = ١٣١٣٦ - ١٣١٦٨ = ١٣١٦٨ - ١٣٢٠٠ = ١٣٢٠٠ - ١٣٢٣٢ = ١٣٢٣٢ - ١٣٢٦٤ = ١٣٢٦٤ - ١٣٢٩٦ = ١٣٢٩٦ - ١٣٣٢٨ = ١٣٣٢٨ - ١٣٣٦٠ = ١٣٣٦٠ - ١٣٣٩٢ = ١٣٣٩٢ - ١٣٤٢٤ = ١٣٤٢٤ - ١٣٤٥٦ = ١٣٤٥٦ - ١٣٤٨٨ = ١٣٤٨٨ - ١٣٥٢٠ = ١٣٥٢٠ - ١٣٥٥٢ = ١٣٥٥٢ - ١٣٥٨٤ = ١٣٥٨٤ - ١٣٦١٦ = ١٣٦١٦ - ١٣٦٤٨ = ١٣٦٤٨ - ١٣٦٨٠ = ١٣٦٨٠ - ١٣٧١٢ = ١٣٧١٢ - ١٣٧٤٤ = ١٣٧٤٤ - ١٣٧٧٦ = ١٣٧٧٦ - ١٣٨٠٨ = ١٣٨٠٨ - ١٣٨٤٠ = ١٣٨٤٠ - ١٣٨٧٢ = ١٣٨٧٢ - ١٣٩٠٤ = ١٣٩٠٤ - ١٣٩٣٦ = ١٣٩٣٦ - ١٣٩٦٨ = ١٣٩٦٨ - ١٤٠٠٠ = ١٤٠٠٠ - ١٤٠٣٢ = ١٤٠٣٢ - ١٤٠٦٤ = ١٤٠٦٤ - ١٤٠٩٦ = ١٤٠٩٦ - ١٤١٢٨ = ١٤١٢٨ - ١٤١٦٠ = ١٤١٦٠ - ١٤١٩٢ = ١٤١٩٢ - ١٤٢٢٤ = ١٤٢٢٤ - ١٤٢٥٦ = ١٤٢٥٦ - ١٤٢٨٨ = ١٤٢٨٨ - ١٤٣٢٠ = ١٤٣٢٠ - ١٤٣٥٢ = ١٤٣٥٢ - ١٤٣٨٤ = ١٤٣٨٤ - ١٤٤١٦ = ١٤٤١٦ - ١٤٤٤٨ = ١٤٤٤٨ - ١٤٤٨٠ = ١٤٤٨٠ - ١٤٥١٢ = ١٤٥١٢ - ١٤٥٤٤ = ١٤٥٤٤ - ١٤٥٧٦ = ١٤٥٧٦ - ١٤٦٠٨ = ١٤٦٠٨ - ١٤٦٤٠ = ١٤٦٤٠ - ١٤٦٧٢ = ١٤٦٧٢ - ١٤٧٠٤ = ١٤٧٠٤ - ١٤٧٣٦ = ١٤٧٣٦ - ١٤٧٦٨ = ١٤٧٦٨ - ١٤٨٠٠ = ١٤٨٠٠ - ١٤٨٣٢ = ١٤٨٣٢ - ١٤٨٦٤ = ١٤٨٦٤ - ١٤٨٩٦ = ١٤٨٩٦ - ١٤٩٢٨ = ١٤٩٢٨ - ١٤٩٦٠ = ١٤٩٦٠ - ١٤٩٩٢ = ١٤٩٩٢ - ١٥٠٢٤ = ١٥٠٢٤ - ١٥٠٥٦ = ١٥٠٥٦ - ١٥٠٨٨ = ١٥٠٨٨ - ١٥١٢٠ = ١٥١٢٠ - ١٥١٥٢ = ١٥١٥٢ - ١٥١٨٤ = ١٥١٨٤ - ١٥٢١٦ = ١٥٢١٦ - ١٥٢٤٨ = ١٥٢٤٨ - ١٥٢٨٠ = ١٥٢٨٠ - ١٥٣١٢ = ١٥٣١٢ - ١٥٣٤٤ = ١٥٣٤٤ - ١٥٣٧٦ = ١٥٣٧٦ - ١٥٤٠٨ = ١٥٤٠٨ - ١٥٤٤٠ = ١٥٤٤٠ - ١٥٤٧٢ = ١٥٤٧٢ - ١٥٥٠٤ = ١٥٥٠٤ - ١٥٥٣٦ = ١٥٥٣٦ - ١٥٥٦٨ = ١٥٥٦٨ - ١٥٦٠٠ = ١٥٦٠٠ - ١٥٦٣٢ = ١٥٦٣٢ - ١٥٦٦٤ = ١٥٦٦٤ - ١٥٦٩٦ = ١٥٦٩٦ - ١٥٧٢٨ = ١٥٧٢٨ - ١٥٧٦٠ = ١٥٧٦٠ - ١٥٧٩٢ = ١٥٧٩٢ - ١٥٨٢٤ = ١٥٨٢٤ - ١٥٨٥٦ = ١٥٨٥٦ - ١٥٨٨٨ = ١٥٨٨٨ - ١٥٩٢٠ = ١٥٩٢٠ - ١٥٩٥٢ = ١٥٩٥٢ - ١٥٩٨٤ = ١٥٩٨٤ - ١٦٠١٦ = ١٦٠١٦ - ١٦٠٤٨ = ١٦٠٤٨ - ١٦٠٨٠ = ١٦٠٨٠ - ١٦١١٢ = ١٦١١٢ - ١٦١٤٤ = ١٦١٤٤ - ١٦١٧٦ = ١٦١٧٦ - ١٦٢٠٨ = ١٦٢٠٨ - ١٦٢٤٠ = ١٦٢٤٠ - ١٦٢٧٢ = ١٦٢٧٢ - ١٦٣٠٤ = ١٦٣٠٤ - ١٦٣٣٦ = ١٦٣٣٦ - ١٦٣٦٨ = ١٦٣٦٨ - ١٦٤٠٠ = ١٦٤٠٠ - ١٦٤٣٢ = ١٦٤٣٢ - ١٦٤٦٤ = ١٦٤٦٤ - ١٦٤٩٦ = ١٦٤٩٦ - ١٦٥٢٨ = ١٦٥٢٨ - ١٦٥٦٠ = ١٦٥٦٠ - ١٦٥٩٢ = ١٦٥٩٢ - ١٦٦٢٤ = ١٦٦٢٤ - ١٦٦٥٦ = ١٦٦٥٦ - ١٦٦٨٨ = ١٦٦٨٨ - ١٦٧٢٠ = ١٦٧٢٠ - ١٦٧٥٢ = ١٦٧٥٢ - ١٦٧٨٤ = ١٦٧٨٤ - ١٦٨١٦ = ١٦٨١٦ - ١٦٨٤٨ = ١٦٨٤٨ - ١٦٨٨٠ = ١٦٨٨٠ - ١٦٩١٢ = ١٦٩١٢ - ١٦٩٤٤ = ١٦٩٤٤ - ١٦٩٧٦ = ١٦٩٧٦ - ١٧٠٠٨ = ١٧٠٠٨ - ١٧٠٤٠ = ١٧٠٤٠ - ١٧٠٧٢ = ١٧٠٧٢ - ١٧١٠٤ = ١٧١٠٤ - ١٧١٣٦ = ١٧١٣٦ - ١٧١٦٨ = ١٧١٦٨ - ١٧٢٠٠ = ١٧٢٠٠ - ١٧٢٣٢ = ١٧٢٣٢ - ١٧٢٦٤ = ١٧٢٦٤ - ١٧٢٩٦ = ١٧٢٩٦ - ١٧٣٢٨ = ١٧٣٢٨ - ١٧٣٦٠ = ١٧٣٦٠ - ١٧٣٩٢ = ١٧٣٩٢ - ١٧٤٢٤ = ١٧٤٢٤ - ١٧٤٥٦ = ١٧٤٥٦ - ١٧٤٨٨ = ١٧٤٨٨ - ١٧٥٢٠ = ١٧٥٢٠ - ١٧٥٥٢ = ١٧٥٥٢ - ١٧٥٨٤ = ١٧٥٨٤ - ١٧٦١٦ = ١٧٦١٦ - ١٧٦٤٨ = ١٧٦٤٨ - ١٧$$

## تعريف المتتابعة الحسابية:

المتتابعة  $\{ح_n\}$  المنتهية أو الغير منتهية تسمى متتابعة حسابية إذا وجد عدداً ثابتاً  $ε$  بحيث :

$$ε = \text{الحد اللاحق} - \text{الحد السابق} .$$

### بعبارة رياضية :

$$ε = ح_n - ح_{n-1} , \text{ لجميع قيم } n .$$

ونسمي الفرق الثابت  $ε$  بأساس المتتابعة الحسابية .

### الحد النوني ( الحد العام ) للمتتابعة الحسابية :

وهو يُكتب على الصورة :  $ح_n = p + (n-1) \times ε$  ، حيث :

$p$  : الحد الأول .  $n$  : رتبة الحد ( أي موقع الحد في المتتابعة ) .

$ε$  : الأساس .  $ح_n$  : الحد الأخير ، أو الحد العام .

### فمثلاً :

في المتتابعة الحسابية : ( ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ..... )

الحد الأول  $p = ٥$  ، الأساس  $ε = ٩ - ٥ = ٤$

الحد العام  $ح_n = p + (n-1) \times ε$

$$= ٥ + (n-1) \times ٤$$

$$= ٥ + n \times ٤ - ٤$$

$$\therefore ح_n = ٤n + ١$$

## ملاحظات :

- ① إذا كان  $\epsilon < 0$  ، فإن قيم الحدود تتزايد .
- ② إذا كان  $\epsilon > 0$  ، فإن قيم الحدود تتناقص .
- ③ إذا كان  $\epsilon = 0$  ، فإن قيمة أي حد تساوي قيمة الحد الأول .
- ④  $\mathcal{H}$  : دالة من الدرجة الأولى في  $\mathcal{H}$  .
- ⑤  $\mathcal{H}$  يرمز ( لعدد الحدود ) أو ( لرتبة الحد ) أو ( رتبة الحد الأخير إذا كان مجهولاً ) ويمكن استخدامه .

## نوفر أن :

لايجاد أي حد من حدود المتتابعة الحسابية لابد من إيجاد قيم :  $\mathcal{P}$  ،  $\mathcal{H}$  ،  $\epsilon$  .

## ملاحظة مهمة :

إذا عُرف في المتتابعة **الحد الأول :  $\mathcal{P}$**  ، و **الأساس :  $\epsilon$**  ، فإننا نستطيع الحصول على جميع حدود المتتابعة وذلك بإضافة  $\epsilon$  إلى الحد السابق فنحصل على الحد اللاحق وهكذا فنحصل على جميع حدود المتتابعة .

## مثال :

أوجد المتتابعة الحسابية إذا كان حدها الأول  $\mathcal{P} = 7$  ، وأساسها  $\mathcal{H} = -2$  .

## الحل :

$$\text{معطى : } \mathcal{P} = 7 , \mathcal{H} = -2$$

من الملاحظة في الأعلى نجد أن :

$$\therefore \mathcal{H}_1 = 7 , \mathcal{H}_2 = 7 + (-2) = 5 , \mathcal{H}_3 = 5 + (-2) = 3$$

∴ المتتابعة هي : ( 7 ، 5 ، 3 ، 1 ، -1 ، ..... ) .

طبعاً إذا كانت المتتابعة غير منتهية نكتفي بكتابة حدودها الأولى .

## نهارين على الدرس الثاني : المتابعة الحسابية :

١ يُن أي من المتابعات التالية حسابية :

① ( ..... ، ٢١ ، ١٧ ، ١٣ ، ٩ ، ٥ )

② ( ..... ، ٩- ، ٦- ، ٣- ، ٠ ، ٣ )

③ ( ..... ، ١٤ ، ١٣ ، ٧ ، ٥ ، ٢ )

٢ في المتابعة الحسابية : ( ..... ، ٤٠ ، ٣٧ ، ٣٤ )

أوجد : الأساس ، الحد العام .

٣ في المتابعة :  $\{ ح_r \}$  ، حيث :  $ح_r = -٧ - ١$  ، أثبت أنها

حسابية .

٤ أوجد  $ح_{١٥}$  من المتابعة الحسابية ( ٨٧ ، ٨٠ ، ٧٣ ، ٦٦ ،

..... ) ثم اكتب الحد النوني للمتابعة .



## حل تمارين على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

١ بَيِّنْ أَيَّ مِنَ الْمَتَابَعَاتِ التَّالِيَةِ حِسَابِيَّةٍ :

① ( ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ..... )

② ( ٣ ، ٠ ، ٣- ، ٦- ، ٩- ، ..... )

③ ( ٢٩ ، ٥ ، ٧ ، ١٣ ، ١٤ ، ..... )

الحل :

① ( ٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ..... )

كما قلنا سابقاً في الشرح أن قاعدة المتتابعة الحسابية هي :

الحد اللاحق - الحد السابق = مقدار ثابت ، لجميع قيم المتتابعة

$$٩ - ٥ = ١٣ - ٩ = ١٧ - ١٣ = ٢١ - ١٧ = ٤ \Rightarrow ٤ = ٤$$

⇐ المتتابعة حسابية .

② ( ٣ ، ٠ ، ٣- ، ٦- ، ٩- ، ..... )

$$٠ - ٣- = ٣- - ٦- = (٣-) - ٩- = (٦-) - ٩- = ٣- \Rightarrow ٣- = ٣-$$

⇐ المتتابعة حسابية .

③ ( ٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٣ ، ١٤ ، ..... )

$$\left\{ \begin{array}{l} ٣ = ٥ - ٢ \\ ٢ = ٥ - ٧ \end{array} \right. \therefore \text{الفرق يختلف} \Rightarrow \text{المتتابعة ليست حسابية}$$

## حل تمارين على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

٢ في المتتابعة الحسابية : ( ٣٤ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ..... )

أوجد : الأساس ، الحد العام .

الحل :

ذكرنا في الدرس أن الأساس للمتتابعة الحسابية :  $u = \text{الحد اللاحق} - \text{الحد السابق}$  .

$$\therefore u = 37 - 34 = 3$$

الحد العام :  $u_n = p + (n-1) \times u$  ، حيث :

$$p : \text{الحد الأول} = 34 \quad u : \text{الأساس} = 3$$

$$\Leftarrow u_n = 34 + (n-1) \times 3$$

$$= 34 + n \times 3 - 3$$

$$= 31 + n \times 3$$

$$\Leftarrow u_n = 31 + n \times 3$$

للتأكد من الحل :

$$u_1 = 31 + 1 \times 3 = 34 \Leftarrow \text{الحد الأول عندما : } n = 1$$

$$u_2 = 31 + 2 \times 3 = 37 \Leftarrow \text{الحد الثاني عندما : } n = 2$$

$$u_3 = 31 + 3 \times 3 = 40 \Leftarrow \text{الحد الثالث عندما : } n = 3$$

## حل تمارين على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

٣ في المتتابعة :  $\{ح_n\}$  ، حيث :  $ح_n = ٧ - ١$  ، أثبت أنها

حسابية .

الحل :

لأنفسك أن : تكون المتتابعة حسابية إذا كان الفرق بين الحد اللاحق والسابق = مقدار ثابت .

$$\therefore ح_n = ٧ - ١$$

$$\Leftarrow ح_{n+1} = ٧ - (١ + ١) = ٧ - ٢ = ٥ \Leftarrow ح_n + ٤ = ٥$$

$$\Leftarrow ح_{n+1} = ٥ = ٤ + ح_n$$

$$\underline{\text{الآن :}} ح_{n+1} - ح_n = (٥ - ٤) = ١$$

$$= ٥ - ٤ = ١$$

$$= ١$$

= مقدار ثابت

← المتتابعة حسابية

هذا الحل لأنه طلب أن نثبت أنها حسابية ، وللتأكد بإمكاننا فك بعض حدود المتتابعة وسنلاحظ أن الفرق بين

كل حدين متجاورين : ( اللاحق - السابق = مقدار ثابت = ١ )

فائدة :

ذكرنا في الملاحظات أن المتتابعة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى في المجهول  $n$  والآن سنزيد الفائدة أن

معامل  $n$  هو أساس المتتابعة وهو نفسه المقدار الثابت .

## حل تمارين على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

٤ أوجد  $ح_{١٥}$  من المتتابعة الحسابية ( ٨٧ ، ٨٠ ، ٧٣ ، ٦٦ ،

..... ) ثم اكتب الحد النوني للمتتابعة .

الحل :

ذكرنا في الملاحظات : لإيجاد أي حد من حدود المتتابعة الحسابية لابد من إيجاد قيم :  $٩$  ،  $٧$  ،  $٨$  .

كذلك لا تنسى أن :  $ح_{١٥} =$  الحد الخامس عشر

$$٧ - = ٨٧ - ٨٠ = ٩ \leftarrow \text{المتتابعة حسابية}$$

$$٨ = \text{الحد الأول} = ٨٧ \quad ، \quad ٧ = \text{رتبة الحد المطلوب} = ١٥$$

وطبعاً لإيجاد أي حد في المتتابعة الحسابية نعوض في الحد العام :

$$ح_n = ٩ \times (١ - ٧) + ٨$$

$$\leftarrow ح_{١٥} = ٨٧ + (١ - ١٥) \times ٩$$

$$= ٨٧ + ١٤ \times ٩ =$$

$$= ٨٧ + (٩٨ - ) =$$

$$= ٨٧ - ٩٨ =$$

$$= - ١١$$

$$\therefore ح_{١٥} = - ١١$$

$$\text{والحد النوني} = ح_n = ٩ \times (١ - ٧) + ٨$$

$$\leftarrow ح_n = ٨٧ + (١ - ٧) \times ٩ = ٨٧ - ٧٩ = ٨$$

$$\leftarrow ح_n = ٨ - ٩٤ = ٧٧$$

## أمثلة إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

**مثال :** إذا كان ٧ أحد حدود المتتابعة ( ٤٣ ، ٣٩ ، ٣٥ ، .... ) فما ترتيب

هذا الحد وما هو أول حد سالب في هذه المتتابعة .

**الحل :**

في هذا المثال مطلوبان هما :

١- رتبة الحد الذي قيمته ٧ .

٢- أول حد إشارته سالبة في المتتابعة .

**أولاً :**

∴ المطلوب رتبة الحد  $\Leftarrow$  المجهول المطلوب هو :  $n$

طبعاً نعوض في الحد العام :  $u_n = p + (n-1) \times r$  ، حيث :

$$43 = p , \quad 4 = r , \quad u_n = 7$$

الآن : نعوض عن القيم المعطاة :

$$43 = p + (n-1) \times 4$$

$$43 = p + 4n - 4$$

$$47 = 4n + p$$

$$40 = 4n \quad ( \text{نقلنا للطرف الآخر مع تغيير الإشارة} )$$

$$10 = n$$

∴ الحد الذي قيمته ٧ هو الحد العاشر .

**ثانياً :**

لإيجاد أول حد سالب نتبع التالي :

$$u_n = 0$$

$$0 = (n-1) \times 4 + 43$$

$$-43 = (n-1) \times 4$$

∴ أول حد سالب هو الحد الثاني عشر .

**ملاحظة :** توجد طريقة أخرى لاستنتاج الحد السالب سنأخذها في مثال لاحق .

## أمثلة إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

**مثال :** متتابعة حسابية  $ح_٦ = ٤٥$  ،  $ح_{١٥} = ٩٩$  ، اكتب  $ح_٢٠$  ، ثم اكتب المتتابعة .

**الحل :** طريقة أولى للحل :

نعوض في الحد العام بقيم الحدين :  $ح_٦$  ،  $ح_{١٥}$  نجد أن :

$$① ..... ٤٥ = ٤ + ٩ = ح_٦$$

$$② ..... ٩٩ = ٤ + ١٤ + ٩ = ح_{١٥}$$

بطرح ② - ① ينتج :

$$٩ = ٤ \leftarrow ٥٤ = ٤ \times ٦$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين : ① أو ② نجد أن :  $٩ = ٤ \times ٦$  .

$$\therefore \text{المطلوب } ح_٢٠ = ٤ \times ٢٠ = ٨٠$$

$$\therefore ح_٢٠ = ٨٠ = ٤ \times ٢٠$$

$$١١٤ + ١٥ =$$

$$١٢٩ =$$

**طريقة ثانية للحل باستخدام القاعدة التالية :**

قانون لاستنتاج أساس المتتابعة الحسابية إذا عُلم حدان فيها :

$$\text{إذا كان : } ح_٢٠ = ٨٠ ، ح_١٥ = ٩٩ \text{ ، فإن : } ح_٢٠ - ح_١٥ = ٨٠ - ٩٩ = -١٩$$

**الحل :**

$$\therefore \frac{٨٠ - ٩٩}{٢٠ - ١٥} = \frac{ح_٢٠ - ح_١٥}{٢٠ - ١٥} = -١٩ \leftarrow \frac{ح_٢٠ - ح_١٥}{٢٠ - ١٥} = -١٩$$

$$\leftarrow ٨٠ - ٩٩ = -١٩ \times (٢٠ - ١٥)$$

$$\therefore ح_٢٠ = ٨٠ - ٩٩ + ٩٥ = ٧٦$$

ثم نوجد الحد العشرين كما في الطريقة الأولى .

**ملاحظة :** عند استخدام القاعدة في الأعلى لاستنتاج الأساس ننتبه إلى أننا إذا بدأنا بالحد  $ح_٢٠$  في المقام

نبدأ بالرتبة ٢٠ .

## أمثلة إضافية على الدرس الثاني : المتتابعة الحسابية :

**مثال :** قفز رجل مظلي من فوق طائرة بشكل ر آسي نحو الأرض فإذا قطع مسافة ١٦ قدماً في الثانية الأولى وإذا كانت مسافة النزول تزيد بمعدل ٣٢ قدماً كل ثانية فما هي المسافة التي ينزلها المظلي بعد ٢٠ ثانية .

**الحل :**

في الثانية الأولى قطع ١٦ قدماً وكذلك تزيد مسافة النزول بمعدل ٣٢ قدماً لكل ثانية  
⇐ في الثانية الثانية يقطع : ٤٨ قدماً  
في الثانية الثالثة يقطع : ٨٠ قدماً  
في الثانية الرابعة يقطع : ١١٢ قدماً ، وهكذا :  
نستنتج أن نزول المظلي يمثل متتابعة حسابية حدها الأول = ١٦ ، وأساسها = ٣٢  
المطلوب المسافة التي يقطعها المظلي بعد عشرين ثانية .

أي بصورة رياضية المطلوب : ح.م من المتتابعة الحسابية .

$$\Leftarrow \text{ح.م} = ٩ + (١ - ٧) \times ٤$$

$$\Leftarrow \text{ح.م} = ١٦ + (١ - ٢٠) \times ٣٢$$

$$= ١٦ + ٣٢ \times ١٩$$

$$= ٦٠٨ + ١٦$$

$$\therefore \text{ح.م} = ٦٢٤$$

⇐ المسافة التي يقطعها المظلي بعد عشرين ثانية تساوي : ٦٢٤ قدماً .

**نهارين إضافية على الدرس الثاني : المراجعة الحسابية :**

١ إذا كان الحد الخامس من متتابعة حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥ أوجد المتتابعة .

٢ أوجد رتبة الحد الذي قيمته : ٩٩ من المتتابعة الحسابية : ( ٧ ، ٩ ، ١١ ، ..... )

٣ متتابعة حسابية حدها الثامن ينقص عن حدها الثالث بمقدار ٢٠ والحد الثالث ضعف الثامن ، فأوجد الحد الثاني عشر فيها .

٤ متتابعة حسابية فيها :  $14 = c_5$  ،  $20 = c_8$  ، أوجد المتتابعة .

**٥** متتابعة حسابية مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها = ٣٦ ، ومجموع الحدين الخامس والسادس = ٦٦ أوجد المتتابعة .

٦ أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية :  $(-10, -7, -4, \dots, 50)$  .

٧ أوجد الحد الذي رتبته ٣٠٠ في المتتابعة الحسابية التي حدها السادس = ٨ ، وحدها التاسع = ٤١ .

۸ شخص یزن ۱۳۰ کجم یرید انقاص وزنه بمعدل کیلو جرامین کل شهر عن طریق نظام غذائی . بعد کم شهر سیکون وزنه ۸۰ کیلو جراماً إذا استمر بالمعدل نفسه ؟

٩ اثبت أن : ( لو ، لو ب ، لو ب<sup>٢</sup> ، لو ب<sup>٣</sup> ، ..... ) تمثل متتالية حسابية .  
ثم أوجد الحد السابع .

١٠. خزان يحتوي على ٦٢٥ متراً مكعباً من الماء وينقص في كل يوم بمعدل ٢٥ متراً مكعباً عن اليوم الذي قبله ، جد بعد كم يوم :

٢) يبقى في الخزان ٢٧٥ متراً مكعباً من الماء .



## تمارين إضافية على الدرس الثاني : المتتابة الحسابية :

٩ اثبت أن : ( لو ، لو ب ، لو ب<sup>٢</sup> ، لو ب<sup>٣</sup> ، ..... ) تمثل متتالية حسابية .  
ثم أوجد الحد السابع .

الحل :

من خواص اللوغاريتمات :

$$\textcircled{1} \text{ لو ب}^{\frac{1}{p}} = \text{لو ب} - \text{لو ب}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\textcircled{3} \text{ لو ب}^{\frac{1}{p}} \times \text{لو ب}^{\frac{p-1}{p}} = \text{لو ب}$$

تكون المتتابة حسابية إذا كان الفرق بين الحد اللاحق والسابق = مقداراً ثابتاً دائماً .

الآن :

$$\text{لو ب} - \text{لو ب}^{\frac{1}{p}} = \text{لو ب}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\text{لو ب}^{\frac{1}{p}} - \text{لو ب}^{\frac{1}{p^2}} = \text{لو ب}^{\frac{p-1}{p^2}}$$

$$\text{لو ب}^{\frac{1}{p^2}} - \text{لو ب}^{\frac{1}{p^3}} = \text{لو ب}^{\frac{p-1}{p^3}}$$

واضح جداً أن المتتابة حسابية لأن الفرق دائماً ثابت = لو ب

الآن نوجه الحد السابع :

$$( \text{لو ب} = ٤ ، \text{لو ب}^{\frac{1}{2}} = ٢ )$$

$$\text{لو ب}^{\frac{1}{2}} = ٢ \Rightarrow \text{لو ب} = ٤$$

$$\text{لو ب}^{\frac{1}{2}} = ٢ \Rightarrow \text{لو ب} = ٤$$

( من خواص لوغاريتمات )

$$\text{لو ب}^{\frac{1}{2}} = ٢$$

( من خواص اللوغاريتمات )

$$\text{لو ب}^{\frac{1}{2}} = ٢$$

## الدرس الثالث : الأوساط الحسابية :

### تعريف الأوساط الحسابية :

الأوساط الحسابية بين العددين  $p$  و  $b$  هي عبارة عن حدود المتتابعة الحسابية التي حدها الأول  $p$  و حدها الأخير  $b$  وعُرف عدد حدودها مسبقاً .

### نذكر أن :

$$① \text{ عدد الحدود} = \text{عدد الأوساط} + ٢ .$$

$$② \text{ لإيجاد قيمة } s \text{ في حالة الأوساط الحسابية نستخدم القانون : } \frac{p-b}{n-1} = s$$

حيث :  $p$  : الحد الأول ،  $b$  : الحد الأخير ،  $n$  : عدد الحدود ،  $s$  : الأساس .

### حالة خاصة :

إذا كان المطلوب وسطاً حسابياً واحداً فقط فإن :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{p+b}{2}$$

### مثال :

أوجد الخمسة الأوساط الحسابية بين العددين :  $-12$  ،  $114$  .

### الحل :

واضح أن :  $p = -12$  ،  $b = 114$  ،  $n = 7$  .

$$\boxed{-12} , \boxed{\phantom{00}} , \boxed{\phantom{00}} , \boxed{\phantom{00}} , \boxed{\phantom{00}} , \boxed{\phantom{00}} , \boxed{114}$$

$$\Leftarrow s = \frac{p-b}{n-1} = \frac{-12-114}{7-1} = \frac{-126}{6} = -21 .$$

طبعاً : نحصل على المتتابعة الحسابية بإضافة الأساس إلى الحد السابق فنحصل على الحد اللاحق .

∴ الأوساط الحسابية هي :  $9$  ،  $30$  ،  $51$  ،  $72$  ،  $93$  .

## الأوساط الحسابية :

**مثال :** أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين : ٢٣ ، ٩ -

**الحل :**

واضح أن :  $٢٣ = \text{ب}$  ،  $٩ - = \text{ب}$  ،  $٥ = \text{ب}$  .

$$\boxed{٢٣} ، \boxed{\phantom{00}} ، \boxed{\phantom{00}} ، \boxed{\phantom{00}} ، \boxed{٩-}$$

$$\Leftarrow \text{ب} = \frac{٢٣ - ٩ -}{١ - ٥} = \frac{٣٢}{-٤} = -٨$$

**وأيضا للنسبة :** نحصل على المتتابعة الحسابية بإضافة الأساس إلى الحد السابق فنحصل على الحد اللاحق .

والمتتابعة الناشئة هي : ( ٩ - ، ١ - ، ٧ ، ١٥ ، ٢٣ )

∴ الأوساط الحسابية هي : ١ - ، ٧ ، ١٥

**مثال :**

إذا كان الوسط الحسابي بين عددين هو ١٠ و الوسط الحسابي بين مربعيهما هو ١٤٩ فما هما العددان ؟

**الحل :**

نفرض العددين : س ، ص .

$$\text{من الحالة الخاصة للوسط الحسابي نجد أن : } \frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} = ١٠ \Leftarrow \text{س} + \text{ص} = ٢٠ \text{ ..... ①}$$

**الآن :**

$$\text{الوسط الحسابي بين مربعيهما هو } ١٤٩ \Leftarrow \frac{\text{س}^2 + \text{ص}^2}{٢} = ١٤٩ \Leftarrow \text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٢٩٨ \text{ ..... ②}$$

من ① نجد أن :  $\text{ص} = ٢٠ - \text{س}$  ∴ بتعويض قيمة ص في ② نجد أن :

$$\text{س}^2 + (٢٠ - \text{س})^2 = ٢٩٨$$

$$\Leftarrow \text{س}^2 + ٤٠٠ - ٤٠\text{س} + \text{س}^2 = ٢٩٨$$

$$\Leftarrow ٢\text{س}^2 - ٤٠\text{س} + ١٠٢ = ٠$$

معادلة من الدرجة الثانية هناك أكثر من طريقة لحلها : ( القانون العام — التحليل — طريقة المقص )

سنجد أن العددين هما : ٣ ، ١٧ .

## تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

١ أَدخِل خمسة أوساط حسابية بين العددين : ٢٣ ، ٦٥ .

٢ أوجد الحدود الناقصة من المتتابعة الحسابية : ( ٥ ، ..... ، ..... ، ..... ، ..... ، ٣٥ )

٣ إذا كان : ( ٢ ، ٢٤ ، ب ، ٣٢ ، ج ) تكون متتابعة حسابية أوجد

قيم : ٢ ، ب ، ج .

٤ إذا كان : س ، ص وسطين حسابيين بين : ٢ ، ب أثبت أن :

$$٢ - ب = ٣ (س - ص) .$$

٥ أوجد الحدود الناقصة لكي يكون الناتج حدوداً لمتتابعة حسابية :

$$① ( \square ، ٢١ ، \square ، ٥ )$$

$$② ( \square ، ٢٦ ، \square ، \square ، ٤٤ )$$

## حل تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

١ أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين : ٢٣ ، ٦٥ .

الحل :

واضح أن :  $p = 23$  ،  $b = 65$  ،  $v = 7$  .

$$\Leftarrow \epsilon = \frac{p - b}{1 - v} = \frac{23 - 65}{1 - 7} = \frac{-42}{-6} = 7$$

∴ الأوساط الحسابية هي : ٣٠ ، ٣٧ ، ٤٤ ، ٥١ ، ٥٨ .

٢ أوجد الحدود الناقصة من المتتابعة الحسابية : ( ٥ ، ..... ، ..... ، ..... ، ٣٥ )

الحل :

الحدود الناقصة تكون متتابعة حسابية حدها الأول = ٥ ، والآخر = ٣٥  
والحدود الناقصة مع الحدين تكون متتابعة حسابية فيها :

$$p = 5 \text{ ، } b = 35 \text{ ، } v = 6$$

$$\text{نعوض في القانون : } \frac{p - b}{1 - v} = \epsilon \text{ سنجد أن } \epsilon = 6$$

∴ الحدود الناقصة : ١١ ، ١٧ ، ٢٣ ، ٢٩

## حل تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

٣ إذا كان : ( ٢ ، ٢٤ ، ب ، ٣٢ ، ج ) تكون متتابعة حسابية أوجد

قيم : ٢ ، ب ، ج .

الحل :

$$\therefore \text{ب وسط بين ٢٤ و ٣٢} \Rightarrow \text{ب} = \frac{٢٤+٣٢}{٢} = \frac{٥٦}{٢} = ٢٨$$

$$\therefore \text{ب} = ٢٨$$

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية} \Rightarrow ٤ = ٤$$

$$\therefore ٢ = ٢ ، ٣٦ = ج$$

٤ إذا كان : س ، ص وسطين حسابيين بين : ٢ ، ب أثبت أن :

$$٢ - ب = ٣ (س - ص) .$$

الحل :

$$\therefore \text{س ، ص وسطين بين ٢ ، ب}$$

∴ ستكون المتتابعة الحسابية على الصورة : ( ٢ ، س ، ص ، ب )

$$\Rightarrow ٤ = ص - س \text{ ..... ①}$$

$$\text{من العلاقة : } ٤ = \frac{٢ - ب}{١ - س}$$

$$\Rightarrow ٤ = \frac{٢ - ب}{١ - س} \Rightarrow ٣ = ٢ - ب \text{ ..... ②}$$

بالتعويض بقيمة ٤ من : ① في ② نجد أن :

$$٣ = (س - ص) - ب$$

$$\Rightarrow ٣ - (س - ص) = -ب \quad ( \text{بضرب الطرفين في : - ١} )$$

$$\Rightarrow ٣ = (س - ص) - ب$$

## حل تمارين على المتتابعات و الأوساط الحسابية :

٥ أوجد الحدود الناقصة لكي يكون الناتج حدوداً لمتتابعة حسابية :

$$(\square, 21, \square, 5) \text{ (أ)}$$

$$(44, \square, \square, 26, \square) \text{ (ب)}$$

الحل :

$$(\square, 21, \square, 5) \text{ (أ)}$$

الحد الناقص بين : ٥ ، ٢١ هو وسط بينهما

$$\therefore \text{ قيمته } = \frac{5+21}{2} = \frac{26}{2} = 13 .$$

$$\Leftarrow 8 = 5 - 13 = 6 .$$

$$\Leftarrow \text{ الحد الأخير } = 29 .$$

$$(44, \square, \square, 26, \square) \text{ (ب)}$$

$\therefore$  بين ٤٤ ، ٢٦ وسطين حسابيين

$$\therefore \text{ نستطيع أن نوجد } 6 \text{ من العلاقة : } \frac{b-a}{n-1} , \text{ حيث : } n = 4 , a = 26 , b = 44$$

$$\Leftarrow 6 = 6$$

$\therefore$  الحدود الناقصة على التوالي : ٢٠ ، ٣٢ ، ٣٨ .

## تمارين إضافية على هائم أخفه من دروس

السؤال الأول : أوجد الحد النوني للمتتابعات :

١

(  $\sqrt{2}$  ،  $\sqrt{2}$  ،  $\sqrt{2}$  ،  $\sqrt{2}$  ، ..... )

٢

(  $0,9$  ،  $0,99$  ،  $0,999$  ،  $0,9999$  ، ..... )

السؤال الثاني :

١ أيهما أكبر الحد العاشر من البداية أم الحد العاشر من النهاية في المتتابعة :

(  $20 -$  ،  $17 -$  ،  $14 -$  ، ..... ،  $37$  )

٢ إذا كانت :  $p_n$  ،  $b_n$  متتابعتين وكان :

$p_1 = 4$  ،  $p_2 = b_1 + 1$  ،  $b_2 = 5$  ،  $b_3 = p_2 + 1$  ،  $p_3 = 1 + b_2$  ،  $p_4 = 1 + b_3$  ،  $b_4 = 2$  ،  $b_5 = p_4 + 1$  ،  $p_5 = 1 + b_4$  ،  $p_6 = 1 + b_5$  ،  $b_6 = 3$  ،  $b_7 = p_6 + 1$  ،  $p_7 = 1 + b_6$  ،  $p_8 = 1 + b_7$  ،  $b_8 = 4$  ،  $b_9 = p_8 + 1$  ،  $p_9 = 1 + b_8$  ،  $p_{10} = 1 + b_9$  ،  $b_{10} = 5$  ،  $b_{11} = p_{10} + 1$  ،  $p_{11} = 1 + b_{10}$  ،  $p_{12} = 1 + b_{11}$  ،  $b_{12} = 6$  ،  $b_{13} = p_{12} + 1$  ،  $p_{13} = 1 + b_{12}$  ،  $p_{14} = 1 + b_{13}$  ،  $b_{14} = 7$  ،  $b_{15} = p_{14} + 1$  ،  $p_{15} = 1 + b_{14}$  ،  $p_{16} = 1 + b_{15}$  ،  $b_{16} = 8$  ،  $b_{17} = p_{16} + 1$  ،  $p_{17} = 1 + b_{16}$  ،  $p_{18} = 1 + b_{17}$  ،  $b_{18} = 9$  ،  $b_{19} = p_{18} + 1$  ،  $p_{19} = 1 + b_{18}$  ،  $p_{20} = 1 + b_{19}$  ،  $b_{20} = 10$  ،  $b_{21} = p_{20} + 1$  ،  $p_{21} = 1 + b_{20}$  ،  $p_{22} = 1 + b_{21}$  ،  $b_{22} = 11$  ،  $b_{23} = p_{22} + 1$  ،  $p_{23} = 1 + b_{22}$  ،  $p_{24} = 1 + b_{23}$  ،  $b_{24} = 12$  ،  $b_{25} = p_{24} + 1$  ،  $p_{25} = 1 + b_{24}$  ،  $p_{26} = 1 + b_{25}$  ،  $b_{26} = 13$  ،  $b_{27} = p_{26} + 1$  ،  $p_{27} = 1 + b_{26}$  ،  $p_{28} = 1 + b_{27}$  ،  $b_{28} = 14$  ،  $b_{29} = p_{28} + 1$  ،  $p_{29} = 1 + b_{28}$  ،  $p_{30} = 1 + b_{29}$  ،  $b_{30} = 15$  ،  $b_{31} = p_{30} + 1$  ،  $p_{31} = 1 + b_{30}$  ،  $p_{32} = 1 + b_{31}$  ،  $b_{32} = 16$  ،  $b_{33} = p_{32} + 1$  ،  $p_{33} = 1 + b_{32}$  ،  $p_{34} = 1 + b_{33}$  ،  $b_{34} = 17$  ،  $b_{35} = p_{34} + 1$  ،  $p_{35} = 1 + b_{34}$  ،  $p_{36} = 1 + b_{35}$  ،  $b_{36} = 18$  ،  $b_{37} = p_{36} + 1$  ،  $p_{37} = 1 + b_{36}$  ،  $p_{38} = 1 + b_{37}$  ،  $b_{38} = 19$  ،  $b_{39} = p_{38} + 1$  ،  $p_{39} = 1 + b_{38}$  ،  $p_{40} = 1 + b_{39}$  ،  $b_{40} = 20$  ،  $b_{41} = p_{40} + 1$  ،  $p_{41} = 1 + b_{40}$  ،  $p_{42} = 1 + b_{41}$  ،  $b_{42} = 21$  ،  $b_{43} = p_{42} + 1$  ،  $p_{43} = 1 + b_{42}$  ،  $p_{44} = 1 + b_{43}$  ،  $b_{44} = 22$  ،  $b_{45} = p_{44} + 1$  ،  $p_{45} = 1 + b_{44}$  ،  $p_{46} = 1 + b_{45}$  ،  $b_{46} = 23$  ،  $b_{47} = p_{46} + 1$  ،  $p_{47} = 1 + b_{46}$  ،  $p_{48} = 1 + b_{47}$  ،  $b_{48} = 24$  ،  $b_{49} = p_{48} + 1$  ،  $p_{49} = 1 + b_{48}$  ،  $p_{50} = 1 + b_{49}$  ،  $b_{50} = 25$  ،  $b_{51} = p_{50} + 1$  ،  $p_{51} = 1 + b_{50}$  ،  $p_{52} = 1 + b_{51}$  ،  $b_{52} = 26$  ،  $b_{53} = p_{52} + 1$  ،  $p_{53} = 1 + b_{52}$  ،  $p_{54} = 1 + b_{53}$  ،  $b_{54} = 27$  ،  $b_{55} = p_{54} + 1$  ،  $p_{55} = 1 + b_{54}$  ،  $p_{56} = 1 + b_{55}$  ،  $b_{56} = 28$  ،  $b_{57} = p_{56} + 1$  ،  $p_{57} = 1 + b_{56}$  ،  $p_{58} = 1 + b_{57}$  ،  $b_{58} = 29$  ،  $b_{59} = p_{58} + 1$  ،  $p_{59} = 1 + b_{58}$  ،  $p_{60} = 1 + b_{59}$  ،  $b_{60} = 30$  ،  $b_{61} = p_{60} + 1$  ،  $p_{61} = 1 + b_{60}$  ،  $p_{62} = 1 + b_{61}$  ،  $b_{62} = 31$  ،  $b_{63} = p_{62} + 1$  ،  $p_{63} = 1 + b_{62}$  ،  $p_{64} = 1 + b_{63}$  ،  $b_{64} = 32$  ،  $b_{65} = p_{64} + 1$  ،  $p_{65} = 1 + b_{64}$  ،  $p_{66} = 1 + b_{65}$  ،  $b_{66} = 33$  ،  $b_{67} = p_{66} + 1$  ،  $p_{67} = 1 + b_{66}$  ،  $p_{68} = 1 + b_{67}$  ،  $b_{68} = 34$  ،  $b_{69} = p_{68} + 1$  ،  $p_{69} = 1 + b_{68}$  ،  $p_{70} = 1 + b_{69}$  ،  $b_{70} = 35$  ،  $b_{71} = p_{70} + 1$  ،  $p_{71} = 1 + b_{70}$  ،  $p_{72} = 1 + b_{71}$  ،  $b_{72} = 36$  ،  $b_{73} = p_{72} + 1$  ،  $p_{73} = 1 + b_{72}$  ،  $p_{74} = 1 + b_{73}$  ،  $b_{74} = 37$  ،  $b_{75} = p_{74} + 1$  ،  $p_{75} = 1 + b_{74}$  ،  $p_{76} = 1 + b_{75}$  ،  $b_{76} = 38$  ،  $b_{77} = p_{76} + 1$  ،  $p_{77} = 1 + b_{76}$  ،  $p_{78} = 1 + b_{77}$  ،  $b_{78} = 39$  ،  $b_{79} = p_{78} + 1$  ،  $p_{79} = 1 + b_{78}$  ،  $p_{80} = 1 + b_{79}$  ،  $b_{80} = 40$  ،  $b_{81} = p_{80} + 1$  ،  $p_{81} = 1 + b_{80}$  ،  $p_{82} = 1 + b_{81}$  ،  $b_{82} = 41$  ،  $b_{83} = p_{82} + 1$  ،  $p_{83} = 1 + b_{82}$  ،  $p_{84} = 1 + b_{83}$  ،  $b_{84} = 42$  ،  $b_{85} = p_{84} + 1$  ،  $p_{85} = 1 + b_{84}$  ،  $p_{86} = 1 + b_{85}$  ،  $b_{86} = 43$  ،  $b_{87} = p_{86} + 1$  ،  $p_{87} = 1 + b_{86}$  ،  $p_{88} = 1 + b_{87}$  ،  $b_{88} = 44$  ،  $b_{89} = p_{88} + 1$  ،  $p_{89} = 1 + b_{88}$  ،  $p_{90} = 1 + b_{89}$  ،  $b_{90} = 45$  ،  $b_{91} = p_{90} + 1$  ،  $p_{91} = 1 + b_{90}$  ،  $p_{92} = 1 + b_{91}$  ،  $b_{92} = 46$  ،  $b_{93} = p_{92} + 1$  ،  $p_{93} = 1 + b_{92}$  ،  $p_{94} = 1 + b_{93}$  ،  $b_{94} = 47$  ،  $b_{95} = p_{94} + 1$  ،  $p_{95} = 1 + b_{94}$  ،  $p_{96} = 1 + b_{95}$  ،  $b_{96} = 48$  ،  $b_{97} = p_{96} + 1$  ،  $p_{97} = 1 + b_{96}$  ،  $p_{98} = 1 + b_{97}$  ،  $b_{98} = 49$  ،  $b_{99} = p_{98} + 1$  ،  $p_{99} = 1 + b_{98}$  ،  $p_{100} = 1 + b_{99}$  ،  $b_{100} = 50$  ،  $b_{101} = p_{100} + 1$  ،  $p_{101} = 1 + b_{100}$  ،  $p_{102} = 1 + b_{101}$  ،  $b_{102} = 51$  ،  $b_{103} = p_{102} + 1$  ،  $p_{103} = 1 + b_{102}$  ،  $p_{104} = 1 + b_{103}$  ،  $b_{104} = 52$  ،  $b_{105} = p_{104} + 1$  ،  $p_{105} = 1 + b_{104}$  ،  $p_{106} = 1 + b_{105}$  ،  $b_{106} = 53$  ،  $b_{107} = p_{106} + 1$  ،  $p_{107} = 1 + b_{106}$  ،  $p_{108} = 1 + b_{107}$  ،  $b_{108} = 54$  ،  $b_{109} = p_{108} + 1$  ،  $p_{109} = 1 + b_{108}$  ،  $p_{110} = 1 + b_{109}$  ،  $b_{110} = 55$  ،  $b_{111} = p_{110} + 1$  ،  $p_{111} = 1 + b_{110}$  ،  $p_{112} = 1 + b_{111}$  ،  $b_{112} = 56$  ،  $b_{113} = p_{112} + 1$  ،  $p_{113} = 1 + b_{112}$  ،  $p_{114} = 1 + b_{113}$  ،  $b_{114} = 57$  ،  $b_{115} = p_{114} + 1$  ،  $p_{115} = 1 + b_{114}$  ،  $p_{116} = 1 + b_{115}$  ،  $b_{116} = 58$  ،  $b_{117} = p_{116} + 1$  ،  $p_{117} = 1 + b_{116}$  ،  $p_{118} = 1 + b_{117}$  ،  $b_{118} = 59$  ،  $b_{119} = p_{118} + 1$  ،  $p_{119} = 1 + b_{118}$  ،  $p_{120} = 1 + b_{119}$  ،  $b_{120} = 60$  ،  $b_{121} = p_{120} + 1$  ،  $p_{121} = 1 + b_{120}$  ،  $p_{122} = 1 + b_{121}$  ،  $b_{122} = 61$  ،  $b_{123} = p_{122} + 1$  ،  $p_{123} = 1 + b_{122}$  ،  $p_{124} = 1 + b_{123}$  ،  $b_{124} = 62$  ،  $b_{125} = p_{124} + 1$  ،  $p_{125} = 1 + b_{124}$  ،  $p_{126} = 1 + b_{125}$  ،  $b_{126} = 63$  ،  $b_{127} = p_{126} + 1$  ،  $p_{127} = 1 + b_{126}$  ،  $p_{128} = 1 + b_{127}$  ،  $b_{128} = 64$  ،  $b_{129} = p_{128} + 1$  ،  $p_{129} = 1 + b_{128}$  ،  $p_{130} = 1 + b_{129}$  ،  $b_{130} = 65$  ،  $b_{131} = p_{130} + 1$  ،  $p_{131} = 1 + b_{130}$  ،  $p_{132} = 1 + b_{131}$  ،  $b_{132} = 66$  ،  $b_{133} = p_{132} + 1$  ،  $p_{133} = 1 + b_{132}$  ،  $p_{134} = 1 + b_{133}$  ،  $b_{134} = 67$  ،  $b_{135} = p_{134} + 1$  ،  $p_{135} = 1 + b_{134}$  ،  $p_{136} = 1 + b_{135}$  ،  $b_{136} = 68$  ،  $b_{137} = p_{136} + 1$  ،  $p_{137} = 1 + b_{136}$  ،  $p_{138} = 1 + b_{137}$  ،  $b_{138} = 69$  ،  $b_{139} = p_{138} + 1$  ،  $p_{139} = 1 + b_{138}$  ،  $p_{140} = 1 + b_{139}$  ،  $b_{140} = 70$  ،  $b_{141} = p_{140} + 1$  ،  $p_{141} = 1 + b_{140}$  ،  $p_{142} = 1 + b_{141}$  ،  $b_{142} = 71$  ،  $b_{143} = p_{142} + 1$  ،  $p_{143} = 1 + b_{142}$  ،  $p_{144} = 1 + b_{143}$  ،  $b_{144} = 72$  ،  $b_{145} = p_{144} + 1$  ،  $p_{145} = 1 + b_{144}$  ،  $p_{146} = 1 + b_{145}$  ،  $b_{146} = 73$  ،  $b_{147} = p_{146} + 1$  ،  $p_{147} = 1 + b_{146}$  ،  $p_{148} = 1 + b_{147}$  ،  $b_{148} = 74$  ،  $b_{149} = p_{148} + 1$  ،  $p_{149} = 1 + b_{148}$  ،  $p_{150} = 1 + b_{149}$  ،  $b_{150} = 75$  ،  $b_{151} = p_{150} + 1$  ،  $p_{151} = 1 + b_{150}$  ،  $p_{152} = 1 + b_{151}$  ،  $b_{152} = 76$  ،  $b_{153} = p_{152} + 1$  ،  $p_{153} = 1 + b_{152}$  ،  $p_{154} = 1 + b_{153}$  ،  $b_{154} = 77$  ،  $b_{155} = p_{154} + 1$  ،  $p_{155} = 1 + b_{154}$  ،  $p_{156} = 1 + b_{155}$  ،  $b_{156} = 78$  ،  $b_{157} = p_{156} + 1$  ،  $p_{157} = 1 + b_{156}$  ،  $p_{158} = 1 + b_{157}$  ،  $b_{158} = 79$  ،  $b_{159} = p_{158} + 1$  ،  $p_{159} = 1 + b_{158}$  ،  $p_{160} = 1 + b_{159}$  ،  $b_{160} = 80$  ،  $b_{161} = p_{160} + 1$  ،  $p_{161} = 1 + b_{160}$  ،  $p_{162} = 1 + b_{161}$  ،  $b_{162} = 81$  ،  $b_{163} = p_{162} + 1$  ،  $p_{163} = 1 + b_{162}$  ،  $p_{164} = 1 + b_{163}$  ،  $b_{164} = 82$  ،  $b_{165} = p_{164} + 1$  ،  $p_{165} = 1 + b_{164}$  ،  $p_{166} = 1 + b_{165}$  ،  $b_{166} = 83$  ،  $b_{167} = p_{166} + 1$  ،  $p_{167} = 1 + b_{166}$  ،  $p_{168} = 1 + b_{167}$  ،  $b_{168} = 84$  ،  $b_{169} = p_{168} + 1$  ،  $p_{169} = 1 + b_{168}$  ،  $p_{170} = 1 + b_{169}$  ،  $b_{170} = 85$  ،  $b_{171} = p_{170} + 1$  ،  $p_{171} = 1 + b_{170}$  ،  $p_{172} = 1 + b_{171}$  ،  $b_{172} = 86$  ،  $b_{173} = p_{172} + 1$  ،  $p_{173} = 1 + b_{172}$  ،  $p_{174} = 1 + b_{173}$  ،  $b_{174} = 87$  ،  $b_{175} = p_{174} + 1$  ،  $p_{175} = 1 + b_{174}$  ،  $p_{176} = 1 + b_{175}$  ،  $b_{176} = 88$  ،  $b_{177} = p_{176} + 1$  ،  $p_{177} = 1 + b_{176}$  ،  $p_{178} = 1 + b_{177}$  ،  $b_{178} = 89$  ،  $b_{179} = p_{178} + 1$  ،  $p_{179} = 1 + b_{178}$  ،  $p_{180} = 1 + b_{179}$  ،  $b_{180} = 90$  ،  $b_{181} = p_{180} + 1$  ،  $p_{181} = 1 + b_{180}$  ،  $p_{182} = 1 + b_{181}$  ،  $b_{182} = 91$  ،  $b_{183} = p_{182} + 1$  ،  $p_{183} = 1 + b_{182}$  ،  $p_{184} = 1 + b_{183}$  ،  $b_{184} = 92$  ،  $b_{185} = p_{184} + 1$  ،  $p_{185} = 1 + b_{184}$  ،  $p_{186} = 1 + b_{185}$  ،  $b_{186} = 93$  ،  $b_{187} = p_{186} + 1$  ،  $p_{187} = 1 + b_{186}$  ،  $p_{188} = 1 + b_{187}$  ،  $b_{188} = 94$  ،  $b_{189} = p_{188} + 1$  ،  $p_{189} = 1 + b_{188}$  ،  $p_{190} = 1 + b_{189}$  ،  $b_{190} = 95$  ،  $b_{191} = p_{190} + 1$  ،  $p_{191} = 1 + b_{190}$  ،  $p_{192} = 1 + b_{191}$  ،  $b_{192} = 96$  ،  $b_{193} = p_{192} + 1$  ،  $p_{193} = 1 + b_{192}$  ،  $p_{194} = 1 + b_{193}$  ،  $b_{194} = 97$  ،  $b_{195} = p_{194} + 1$  ،  $p_{195} = 1 + b_{194}$  ،  $p_{196} = 1 + b_{195}$  ،  $b_{196} = 98$  ،  $b_{197} = p_{196} + 1$  ،  $p_{197} = 1 + b_{196}$  ،  $p_{198} = 1 + b_{197}$  ،  $b_{198} = 99$  ،  $b_{199} = p_{198} + 1$  ،  $p_{199} = 1 + b_{198}$  ،  $p_{200} = 1 + b_{199}$  ،  $b_{200} = 100$  ،  $b_{201} = p_{200} + 1$  ،  $p_{201} = 1 + b_{200}$  ،  $p_{202} = 1 + b_{201}$  ،  $b_{202} = 101$  ،  $b_{203} = p_{202} + 1$  ،  $p_{203} = 1 + b_{202}$  ،  $p_{204} = 1 + b_{203}$  ،  $b_{204} = 102$  ،  $b_{205} = p_{204} + 1$  ،  $p_{205} = 1 + b_{204}$  ،  $p_{206} = 1 + b_{205}$  ،  $b_{206} = 103$  ،  $b_{207} = p_{206} + 1$  ،  $p_{207} = 1 + b_{206}$  ،  $p_{208} = 1 + b_{207}$  ،  $b_{208} = 104$  ،  $b_{209} = p_{208} + 1$  ،  $p_{209} = 1 + b_{208}$  ،  $p_{210} = 1 + b_{209}$  ،  $b_{210} = 105$  ،  $b_{211} = p_{210} + 1$  ،  $p_{211} = 1 + b_{210}$  ،  $p_{212} = 1 + b_{211}$  ،  $b_{212} = 106$  ،  $b_{213} = p_{212} + 1$  ،  $p_{213} = 1 + b_{212}$  ،  $p_{214} = 1 + b_{213}$  ،  $b_{214} = 107$  ،  $b_{215} = p_{214} + 1$  ،  $p_{215} = 1 + b_{214}$  ،  $p_{216} = 1 + b_{215}$  ،  $b_{216} = 108$  ،  $b_{217} = p_{216} + 1$  ،  $p_{217} = 1 + b_{216}$  ،  $p_{218} = 1 + b_{217}$  ،  $b_{218} = 109$  ،  $b_{219} = p_{218} + 1$  ،  $p_{219} = 1 + b_{218}$  ،  $p_{220} = 1 + b_{219}$  ،  $b_{220} = 110$  ،  $b_{221} = p_{220} + 1$  ،  $p_{221} = 1 + b_{220}$  ،  $p_{222} = 1 + b_{221}$  ،  $b_{222} = 111$  ،  $b_{223} = p_{222} + 1$  ،  $p_{223} = 1 + b_{222}$  ،  $p_{224} = 1 + b_{223}$  ،  $b_{224} = 112$  ،  $b_{225} = p_{224} + 1$  ،  $p_{225} = 1 + b_{224}$  ،  $p_{226} = 1 + b_{225}$  ،  $b_{226} = 113$  ،  $b_{227} = p_{226} + 1$  ،  $p_{227} = 1 + b_{226}$  ،  $p_{228} = 1 + b_{227}$  ،  $b_{228} = 114$  ،  $b_{229} = p_{228} + 1$  ،  $p_{229} = 1 + b_{228}$  ،  $p_{230} = 1 + b_{229}$  ،  $b_{230} = 115$  ،  $b_{231} = p_{230} + 1$  ،  $p_{231} = 1 + b_{230}$  ،  $p_{232} = 1 + b_{231}$  ،  $b_{232} = 116$  ،  $b_{233} = p_{232} + 1$  ،  $p_{233} = 1 + b_{232}$  ،  $p_{234} = 1 + b_{233}$  ،  $b_{234} = 117$  ،  $b_{235} = p_{234} + 1$  ،  $p_{235} = 1 + b_{234}$  ،  $p_{236} = 1 + b_{235}$  ،  $b_{236} = 118$  ،  $b_{237} = p_{236} + 1$  ،  $p_{237} = 1 + b_{236}$  ،  $p_{238} = 1 + b_{237}$  ،  $b_{238} = 119$  ،  $b_{239} = p_{238} + 1$  ،  $p_{239} = 1 + b_{238}$  ،  $p_{240} = 1 + b_{239}$  ،  $b_{240} = 120$  ،  $b_{241} = p_{240} + 1$  ،  $p_{241} = 1 + b_{240}$  ،  $p_{242} = 1 + b_{241}$  ،  $b_{242} = 121$  ،  $b_{243} = p_{242} + 1$  ،  $p_{243} = 1 + b_{242}$  ،  $p_{244} = 1 + b_{243}$  ،  $b_{244} = 122$  ،  $b_{245} = p_{244} + 1$  ،  $p_{245} = 1 + b_{244}$  ،  $p_{246} = 1 + b_{245}$  ،  $b_{246} = 123$  ،  $b_{247} = p_{246} + 1$  ،  $p_{247} = 1 + b_{246}$  ،  $p_{248} = 1 + b_{247}$  ،  $b_{248} = 124$  ،  $b_{249} = p_{248} + 1$  ،  $p_{249} = 1 + b_{248}$  ،  $p_{250} = 1 + b_{249}$  ،  $b_{250} = 125$  ،  $b_{251} = p_{250} + 1$  ،  $p_{251} = 1 + b_{250}$  ،  $p_{252} = 1 + b_{251}$  ،  $b_{252} = 126$  ،  $b_{253} = p_{252} + 1$  ،  $p_{253} = 1 + b_{252}$  ،  $p_{254} = 1 + b_{253}$  ،  $b_{254} = 127$  ،  $b_{255} = p_{254} + 1$  ،  $p_{255} = 1 + b_{254}$  ،  $p_{256} = 1 + b_{255}$  ،  $b_{256} = 128$  ،  $b_{257} = p_{256} + 1$  ،  $p_{257} = 1 + b_{256}$  ،  $p_{258} = 1 + b_{257}$  ،  $b_{258} = 129$  ،  $b_{259} = p_{258} + 1$  ،  $p_{259} = 1 + b_{258}$  ،  $p_{260} = 1 + b_{259}$  ،  $b_{260} = 130$  ،  $b_{261} = p_{260} + 1$  ،  $p_{261} = 1 + b_{260}$  ،  $p_{262} = 1 + b_{261}$  ،  $b_{262} = 131$  ،  $b_{263} = p_{262} + 1$  ،  $p_{263} = 1 + b_{262}$  ،  $p_{264} = 1 + b_{263}$  ،  $b_{264} = 132$  ،  $b_{265} = p_{264} + 1$  ،  $p_{265} = 1 + b_{264}$  ،  $p_{266} = 1 + b_{265}$  ،  $b_{266} = 133$  ،  $b_{267} = p_{266} + 1$  ،  $p_{267} = 1 + b_{266}$  ،  $p_{268} = 1 + b_{267}$  ،  $b_{268} = 134$  ،  $b_{269} = p_{268} + 1$  ،  $p_{269} = 1 + b_{268}$  ،  $p_{270} = 1 + b_{269}$  ،  $b_{270} = 135$  ،  $b_{271} = p_{270} + 1$  ،  $p_{271} = 1 + b_{270}$  ،  $p_{272} = 1 + b_{271}$  ،  $b_{272} = 136$  ،  $b_{273} = p_{272} + 1$  ،  $p_{273} = 1 + b_{272}$  ،  $p_{274} = 1 + b_{273}$  ،  $b_{274} = 137$  ،  $b_{275} = p_{274} + 1$  ،  $p_{275} = 1 + b_{274}$  ،  $p_{276} = 1 + b_{275}$  ،  $b_{276} = 138$  ،  $b_{277} = p_{276} + 1$  ،  $p_{277} = 1 + b_{276}$  ،  $p_{278} = 1 + b_{277}$  ،  $b_{278} = 139$  ،  $b_{279} = p_{278} + 1$  ،  $p_{279} = 1 + b_{278}$  ،  $p_{280} = 1 + b_{279}$  ،  $b_{280} = 140$  ،  $b_{281} = p_{280} + 1$  ،  $p_{281} = 1 + b_{280}$  ،  $p_{282} = 1 + b_{281}$  ،  $b_{282} = 141$  ،  $b_{283} = p_{282} + 1$  ،  $p_{283} = 1 + b_{282}$  ،  $p_{284} = 1 + b_{283}$  ،  $b_{284} = 142$  ،  $b_{285} = p_{284} + 1$  ،  $p_{285} = 1 + b_{284}$  ،  $p_{286} = 1 + b_{285}$  ،  $b_{286} = 143$  ،  $b_{287} = p_{286} + 1$  ،  $p_{287} = 1 + b_{286}$  ،  $p_{288} = 1 + b_{287}$  ،  $b_{288} = 144$  ،  $b_{289} = p_{288} + 1$  ،  $p_{289} = 1 + b_{288}$  ،  $p_{290} = 1 + b_{289}$  ،  $b_{290} = 145$  ،  $b_{291} = p_{290} + 1$  ،  $p_{291} = 1 + b_{290}$  ،  $p_{292} = 1 + b_{291}$  ،  $b_{292} = 146$  ،  $b_{293} = p_{292} + 1$  ،  $p_{293} = 1 + b_{292}$  ،  $p_{294} = 1 + b_{293}$  ،  $b_{294} = 147$  ،  $b_{295} = p_{294} + 1$  ،  $p_{295} = 1 + b_{294}$  ،  $p_{296} = 1 + b_{295}$  ،  $b_{296} = 148$  ،  $b_{297} = p_{296} + 1$  ،  $p_{297} = 1 + b_{296}$  ،  $p_{298} = 1 + b_{297}$  ،  $b_{298} = 149$  ،  $b_{299} = p_{298} + 1$  ،  $p_{299} = 1 + b_{298}$  ،  $p_{300} = 1 + b_{299}$  ،  $b_{300} = 150$  ،  $b_{301} = p_{300} + 1$  ،  $p_{301} = 1 + b_{300}$  ،  $p_{302} = 1 + b_{301}$  ،  $b_{302} = 151$  ،  $b_{303} = p_{302} + 1$  ،  $p_{303} = 1 + b_{302}$  ،  $p_{304} = 1 + b_{303}$  ،  $b_{304} = 152$  ،  $b_{305} = p_{304} + 1$  ،  $p_{3$



## الدرس الرابع : المتتابعات الهندسية ( Geometric Sequence )

عرفنا سابقاً المتتابعة الحسابية ووجدنا أن المتتابعة تكون حسابية إذا كان الفرق بين كل حد وسابقة دائماً مقداراً ثابتاً .

### الآن :

إذا لاحظنا المتتابعة التالية : ( ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ..... ) .

سنلاحظ أن الفرق بين كل حد وسابقة يختلف تماماً :

لاحظ :  $٢ = ٢ - ٤$  ،  $٤ = ٤ - ٨$  ،  $٨ = ٨ - ١٦$  ،

بينما : النسبة بين كل حدين اللاحق والسابق دائماً ثابتاً .

$$٢ = \frac{٢}{٤} ، ٢ = \frac{٤}{٨} ، ٢ = \frac{٨}{١٦}$$

### فهذا :

هذه المتتابعات التي يكون فيها النسبة بين كل حدين مقداراً ثابتاً تسمى : **متتابعة هندسية** .

### مثال آخر :

انظر للمتتابعة التالية : ( ٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، ١٠٨ ، ..... )

عند إيجاد النسبة بين كل حدين سنجد دائماً مقداراً ثابتاً .

لاحظ :  $٣ = ٤ \div ١٢$  ،  $٣ = ١٢ \div ٣٦$  ،  $٣ = ٣٦ \div ١٠٨$  ،

فهذه المتتابعة تسمى : **متتابعة هندسية** .

فما تعريف المتتابعة الهندسية ؟

## تعريف المتتابعة الهندسية:

المتتابعة  $\{C_n\}$  المنتهية أو الغير منتهية تسمى متتابعة هندسية إذا وجد عدداً ثابتاً  $r$

بحيث:  $r = \text{الحد اللاحق} \div \text{الحد السابق}$ .

بعبارة رياضية:  $r = C_n \div C_{n-1}$  ، لجميع قيم  $n$ .

ونسمي الفرق الثابت  $r$  بأساس المتتابعة الهندسية.

## الحده النوني ( الحده العام ) للمتتابعة الهندسية :

وهو يُكتب على الصورة :  $C_n = C_1 \times r^{n-1}$

حيث :

$C_1$  : الحد الأول .

$n$  : رتبة الحد ( أي موقع الحد في المتابعة ) .

$r$  : الأساس .

$C_n$  : الحد الأخير .

## ملاحظات :

①  $C_1 \neq 0$  ،  $r \neq 0$  صفر

② إذا كان  $r < 0$  صفر ، فإن لجميع الحدود نفس إشارة الحد الأول :  $C_1$  .

③ إذا كان  $r > 0$  صفر ، فإن إشارات الحدود تتعاقب بعد إشارة الحد الأول :  $C_1$  .

④ إذا كان  $r = 1$  ، فإن قيمة أي حد تساوي قيمة الحد الأول :  $C_1$  .

⑤  $C_n$  : دالة أسية في  $n$  ( حيث  $n$  من الدرجة الأولى ) .

⑥  $n$  يرمز : ( لعدد الحدود ) أو ( لرتبة الحد ) أو ( رتبة الحد الأخير إذا كان مجهولاً ) ويمكن استخدام

حرف آخر مثل  $m$  .

## نفسر أن :

لايجاد أي حد من حدود المتتابعة الهندسية لابد من إيجاد قيم :  $C_1$  ،  $n$  ،  $r$  .

## ملاحظة مهمة :

إذا عُرف في المتتابعة **الحد الأول :  $P$**  ، و **الأساس :  $r$**  ، فإننا نستطيع الحصول على جميع حدود المتتابعة وذلك بضرب  $r$  في الحد السابق ، فنحصل على الحد اللاحق وهكذا نحصل على جميع حدود المتتابعة .

**مثال :** أوجد المتتابعة الهندسية إذا كان حدها الأول  $= -2$  ، وأساسها  $= 4$  .

## الحل :

$$\text{الحد الأول} = P = -2 \Rightarrow \text{الحد الثاني} = P = -2 \times 4 = -8$$

$$\Rightarrow \text{الحد الثالث} = P = -8 \times 4 = -32$$

**∴ المتتابعة هي :**  $(-2, -8, -32, -128, -512, \dots)$  .

## مثال :

يُبين أي مما يلي متتابعة هندسية :

$$\textcircled{1} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$$

$$\textcircled{2} (7, 21, 24, 36, \dots)$$

$$\textcircled{3} (4, -3, \frac{9}{4}, -\frac{27}{16}, \dots)$$

## الحل :

$$\textcircled{1} (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$$

$$\frac{1}{2} = 1 \div \frac{1}{2} , \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div \frac{1}{2} , \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$  المتتابعة هندسية وأساسها  $= \frac{1}{2}$

$$\textcircled{2} (7, 21, 24, 36, \dots)$$

$$21 \div 7 = 3 \neq 24 \div 21 \Rightarrow \text{المتتابعة ليست هندسية} .$$

$$\textcircled{3} (4, -3, \frac{9}{4}, -\frac{27}{16}, \dots)$$

**هدف المتتابعة هندسية وأساسها  $= -\frac{3}{4}$  ونترك إثباتها للطلاب .**

### مثال :

أوجد  ${}_8H$  في المتتابعة الهندسية : ( ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ..... ) ثم اكتب الحد النوني .

### الحل :

الحد العام ( النوني ) في المتتابعة الهندسية يكتب على الصورة :  ${}_8H = P \times r^{n-1}$

لايجاد أي حد في المتتابعة نحتاج إلى قيم :  $P$  ،  $r$  ،  $n$  لكي نعوضها في الحد العام .

فهي المثال : الحد الأول  $P = 3$

∴ ذكر في السؤال أن المتتابعة هندسية  $\Rightarrow r = \frac{6}{3} = 2$

∴ المطلوب :  ${}_8H \Rightarrow n = 8$

∴  ${}_8H = 3 \times 2^{8-1} = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$

$\Rightarrow {}_8H = 384$  .

### مثال :

متتابعة هندسية حدها الأول ٦٢٥ ، وحدها الأخير ١ ، وأساسها  $\frac{1}{5}$  فما عدد حدودها .

### الحل :

لاحظ أن : عدد حدود المتتابعة = رتبة الحد الأخير ، وذكرنا ذلك في الملاحظة الأخيرة فانتبه .

المعطيات لدينا :  $P = 625$  ،  $r = \frac{1}{5}$  . الحد الأخير  $= 1$

من الحد العام :  ${}_8H = P \times r^{n-1}$

$$1 = 625 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{625}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow$$

$$n-1 = 4 \Rightarrow$$

$$n = 5$$

$\Rightarrow$  عدد الحدود لهذه المتتابعة  $= 5$  .

## تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

١ حدد أي من المتتابعات التالية هندسية ، ثم أوجد أساسها .

Ⓐ ( ٤ ، ١٦ ، ٦٤ ، ..... )

Ⓑ ( ٤ ، ٦ ، ٨ ، ..... )

Ⓒ ( ١ ، ٣ ، ٥ ، ..... )

Ⓓ ( س ، ٨س ، ١٦س ، ..... )

Ⓔ ( س ، ٢س ، ٤س ، ..... )

Ⓜ ( لوس ، ٢لوس ، ٤لوس ، ..... )

٢ أوجد قيمة س في كل من المتتاليات الهندسية التالية :

Ⓐ ( س ، ٧ ، ٣٤٣ ، ..... )

Ⓐ ( ١٥ - ، ٤٥ - ، س ، .... )

٣ أوجد الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية التالية :

Ⓐ ( ٤ ،  $\frac{8}{3}$  ،  $\frac{16}{9}$  ، ..... )

Ⓑ ( ٥ ، ١٠ - ، ٢٠ - ، ..... )

Ⓒ (  $\frac{3}{1000}$  ،  $\frac{3}{100}$  ،  $\frac{3}{10000}$  ، ..... )

Ⓓ ( ٠,٤ ، ٠,٠٠٤ ، ٠,٠٠٠٠٤ ، ..... )

٤ أوجد الحد الثالث من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٢ ،

والحد الخامس = ١٦٢ .

## حل تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

١ حدد أي من المتتابعات التالية هندسية ، ثم أوجد أساسها .

٢ ( ٤ ، ١٦ ، ٦٤ ، ..... )

الحل :

$\frac{16}{4} = 4$  ،  $\frac{64}{16} = 4$  المتتابعة هندسية ، وأساسها  $r = 4$  .

٣ ( ٤ ، ٦ ، ٨ ، ..... )

الحل :

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$  ،  $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$  النسبة غير متساوية بين كل حدين  $\Leftarrow$  المتتابعة ليست هندسية .

٤ ( ١ - ، ٣ - ، ..... )

الحل :

$1 - \div 3 - = \frac{1}{3} -$  ،  $3 - \div 1 - = 3 -$  المتتابعة هندسية ، وأساسها  $r = 3 -$  .

٥ ( س ، ٨ س<sup>٢</sup> ، ١٦ س<sup>٣</sup> ، ..... )

الحل :

$\frac{8 س^2}{س} = ٨ س$  ،  $\frac{16 س^3}{٨ س^2} = ٢ س$  النسبة غير متساوية بين كل حدين  $\Leftarrow$  المتتابعة ليست هندسية .

٦ ( س<sup>٢</sup> ، س<sup>٢</sup> س ، ٣ س<sup>٢</sup> س ، ..... )

الحل :

$\frac{س^2 س}{س^2} = س$  ،  $\frac{٣ س^2 س}{س^2 س} = ٣ س$  المتتابعة هندسية ، وأساسها  $r = س$  .

٧ ( لوس ، لوس<sup>٢</sup> ، لوس<sup>٤</sup> ، ..... )

الحل :

$\frac{لوس^2}{لوس} = لوس$  ،  $\frac{لوس^4}{لوس^2} = لوس^2$   $\Leftarrow$  المتتابعة هندسية ، وأساسها  $r = لوس$  .

## حل تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

٢ أوجد قيمة  $s$  في كل من المتتاليات الهندسية التالية :

Ⓐ ( - ١٥ ، - ٤٥ ،  $s$  ، ... )

الحل :

$$\therefore \text{المتتابعة هندسية} \Leftarrow r = -45 \div -15 = 3$$

$$\therefore s = -45 \times 3 = -135$$

الآنسة أن : كل حد في المتتابعة الهندسية نحصل عليه من ضرب الحد السابق له في الأساس .

ب (  $s$  ، ٧ ، ٣٤٣ ، ..... )

الحل :

$$\therefore \text{المتتابعة هندسية} \Leftarrow r = 343 \div 7 = 49$$

الآن :  $\therefore \frac{7}{s} = 49 \Leftarrow s = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$

٣ أوجد الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية التالية :

Ⓐ ( ٤ ،  $\frac{8}{3}$  ،  $\frac{16}{9}$  ، ..... )

الحل :

لإيجاد الحد النوني لمتتابعة هندسية نحتاج إلى قيم :  $p$  ،  $r$

$$p = 4 ، r = \frac{8}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \Leftarrow r = \frac{8}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{ح } n = p \times r^{n-1}$$

$$\Leftarrow \text{ح } n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times 4$$

## حل تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

٣ أوجد الحد النوني في كل من المتتابعات الهندسية التالية :

ب) ( ٥ ، -١٠ ، ٢٠ ، ..... )

الحل :

$$٥ = ٢ ، ٥ = -١٠ - ٢ = -١٥$$

$$\therefore ٢ \times ١٥ = ٣٠ = ٥$$

$$\leftarrow ٥ = ٣٠ - ٢٥ = ٥$$

ج) ( ..... ،  $\frac{3}{16}$  ،  $\frac{3}{8}$  ،  $\frac{3}{4}$  )

الحل :

$$٢ = \frac{3}{4} ، ٢ = \frac{3}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore ٢ \times \frac{4}{3} = ٢ \frac{2}{3} = ٢$$

$$\leftarrow ٢ = \frac{3}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

د) ( ..... ، ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ..... )

الحل :  $١ = ١$  ،  $٤ = ٢$  ،  $٩ = ٣$  ،  $١٦ = ٤$  ،  $٢٥ = ٥$

$$٢ = ٤ ، ٢ = ٩ - ٧ = ٢$$

$$\therefore ٢ \times ٢ = ٤ = ٢$$

$$\leftarrow ٢ = \frac{1}{16} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{12}$$



## حل تمارين على درس : المتتابعات الهندسية

٤ أوجد الحد الثالث من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٢ ،

والحد الخامس = ١٦٢ .

الحل :

المطلوب الحد الثالث :  $u_3 = ?$

المعطى :  $u_1 = 2$  ،  $u_5 = 162$

الآن :

من الحد العام :  $u_n = u_1 \times r^{n-1}$

نجه أن :

$$u_5 = 2 \times r^4$$

$$\Leftrightarrow 2 \times r^4 = 162$$

$$\Leftrightarrow r^4 = 81$$

$$\Leftrightarrow r^4 = (3)^4$$

$$\Leftrightarrow r = 3$$

$$\therefore u_3 = 2 \times 3^2$$

$$\Leftrightarrow u_3 = 18$$

## أمثلة إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

### مثال :

متتابعة هندسية  $ح_٢ = -٦$  ،  $ح_٥ = ١٦٢$  ، أوجد  $ح_٧$  ؟

### الحل :

#### الطريقة الأولى لاستنتاج الأساس :

$$① \quad ح_٢ = -٦ \leftarrow ح_٣ = -١٢ \leftarrow ح_٤ = -٢٤ \leftarrow ح_٥ = ١٦٢ \dots\dots\dots$$

$$② \quad ح_٥ = ١٦٢ \leftarrow ح_٣ = ١٦٢ \div ٩ = ١٨ \leftarrow ح_٢ = ٢ \dots\dots\dots$$

بقسمة : ② ÷ ① نجد أن :

$$٣ - = ٢٧ \leftarrow ٢ - = ٣$$

لإيجاد قيمة :  $٢$  نعوض في ① بقيمة  $٣$  فنجد أن :  $٢ = ٩$

$$١٤٥٨ = ح_٧ \leftarrow ح_٧ = ١ - ٧ (٣ -) \times ٢ = ح_٧ \leftarrow ح_٧ = ١ - ٧ (٣ -) \times ٢ = ح_٧ \leftarrow ح_٧ = ١٤٥٨$$

#### الطريقة الثانية لاستنتاج الأساس باستخدام القاعدة التالية :

قانون لاستنتاج أساس المتتابعة الهندسية إذا علم حدان فيها :

إذا كان :  $ح_٢$  ،  $ح_٥$  حدين في المتتابعة الهندسية  $ح_٢$  ، فإن :  $ح_٢ = ح_٥ - ٣$

$$\therefore ح_٢ = ح_٥ - ٣ \leftarrow ح_٥ = ١٦٢ \leftarrow ح_٢ = ١٦٢ - ٣ = ١٥٩$$

$$\leftarrow ح_٣ = ٢٧ \leftarrow ح_٢ = ٣$$

بقية الخطوات مثلما في الأعلى .

### ملاحظة :

عند التعويض في هذه القاعدة فإن اختيار  $ح_٢$  و  $ح_٥$  ليس له ضابط إلا أننا إذا اخترنا  $ح_٢$  في البسط فنبدأ في الدرجة بالرتبة  $٢$  ، ويفضل البدء بالرتبة الأكبر خروجاً من أن تكون درجة  $٢$  سالبة .

## أمثلة إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

### مثال :

ما هو رتبة الحد الذي قيمته ١٢٨ في متتابعة هندسية فيها :  $ح_٤ = ٤$  ،  $ح_٥ = ٣٢$  ؟

### الحل :

للتسك أن : رتبة الحد هي المجهول  $ن$  .

لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته : ١٢٨ نعوض في الحد العام :  $ح_ن = ٩ \times ر^{ن-١}$

ولكن نحتاج إلى قيم :  $٩$  ،  $ر$  . فنستفيد من المعطيات في السؤال .

### معطيات :

$$ح_٤ = ٤ ، ح_٥ = ٣٢$$

فعند التعويض في القاعدة السابقة نجد أن :

$$ر^٥ - ٢ = \frac{٣٢}{٩} \Leftarrow ر^٣ = ٨ \Leftarrow ر = ٢$$

وعند التعويض في أحد الحدين في الأعلى بقيمة  $ر$  نجد أن :  $٩ = ٢$

الآن :

$$١٢٨ = ٩ \times (٢)^{ن-١}$$

$$\Leftarrow ٦٤ = (٢)^{ن-١}$$

$$\Leftarrow ٦ = (٢)^{ن-١}$$

$$\Leftarrow ١ - ١ = ٦$$

$$\Leftarrow ٧ = ١$$

∴ رتبة الحد الذي قيمته : ١٢٨ السابعة

## أمثلة إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

**مثال :**

متتابعة هندسية يزيد حدها الثالث عن حدها الثاني بمقدار ٦ ، ويزيد حدها الرابع عن حدها الثاني بمقدار ١٨ فما هي المتتابعة ؟

**الحل :**

**ملاحظة :** لإيجاد المتتابعة الهندسية نحتاج إلى قيم :  $r$  ،  $P$  .

نقوم بتفسير هذي المعلومات بصورة رياضية كالتالي :

$$\text{يزيد حدها الثالث عن حدها الثاني بمقدار } 6 \Leftrightarrow 3C = 2C + 6$$

$$\text{ويزيد حدها الرابع عن حدها الثاني بمقدار } 18 \Leftrightarrow 4C = 2C + 18$$

**الآن :** نعوض عن :  $C_2$  ،  $C_3$  ،  $C_4$  في الصورة العامة :  $C_n = P \times r^{n-1}$

$$\text{①} \quad \therefore P + rP = 2P - r^2P \Leftrightarrow 6 = P(1 - r) \Leftrightarrow 6 = P(1 - r) \dots\dots\dots \text{①}$$

$$\text{②} \quad \therefore 3P + rP = 2P - r^3P \Leftrightarrow 18 = P(1 - r^3) \Leftrightarrow 18 = P(1 - r^3) \dots\dots\dots \text{②}$$

**الآن :** بقسمة : ② على ① نجد أن :

$$\frac{18}{6} = \frac{P(1 - r^3)}{P(1 - r)}$$

( نختصر بين البسط والمقام )

$$3 = \frac{(1 + r)(1 - r)}{(1 - r)}$$

( حللنا البسط إلى فرق بين مربعين مع الاختصار )

$$\Leftrightarrow 3 = 1 + r \Leftrightarrow r = 2$$

**الآن :** بالتعويض بقيمة  $r$  في المعادلة : ① لإيجاد  $P$  :

$$\Leftrightarrow 6 = P(1 - 2) \Leftrightarrow 6 = -P \Leftrightarrow P = -6$$

**∴ المتتابعة هي : ( ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ..... )**

واضح في المتتابعة أن الحد الثالث يزيد عن الثاني بمقدار ٦ والرابع عن الثاني بمقدار ١٨ .

## تمارين إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

١] متتابعة هندسية حدها الرابع - ٤ ، وحدها السابع ٦٤ ، أوجد هذه المتتابعة .

٢] إذا كانت قيمة قطعة أرض هي ١٢٠.٠٠٠ ريال وبعد ثلاث سنوات أصبحت ٤٨٠.٠٠٠ ريال بافتراض أن قيمة الأرض على شكل متتابعة هندسية ما هي القيمة المتوقعة للأرض بعد خمس سنوات .

٣] أوجد المتتابعة الهندسية التي يزيد فيها الحد الثالث عن الثاني بمقدار ٦ والحد الرابع يزيد عن الحد الثالث بمقدار ٤ .

٤] متتابعة هندسية مكونة من ثلاثة حدود مجموعها ٢١ ، وحاصل ضربها ٦٤ أوجد هذه الحدود .

### سؤال خاص للجوابين :

إذا كانت : ( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ..... ) متتابعة حسابية أساسها  $P$  ، أثبت أن :  
( ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ..... )  
تمثل متتابعة هندسية وأوجد أساسها .

## تمارين إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

٣ أوجد المتتابعة الهندسية التي يزيد فيها الحد الثالث عن الثاني بمقدار ٦ والحد

الرابع يزيد عن الحد الثالث بمقدار ٤ .

الحل :

$$(١)..... ٦ = (١ - r) r^2 \Leftarrow ٦ = r^2 - r^3 \Leftarrow ٦ = r^2 - r^3 \Leftarrow ٦ + r^3 = r^2$$

$$(٢)..... ٤ = (١ - r) r^3 \Leftarrow ٤ = r^3 - r^4 \Leftarrow ٤ = r^3 - r^4 \Leftarrow ٤ + r^4 = r^3$$

$$\text{بقسمة (٢) } \div \text{ (١) نجد أن : } r = \frac{4}{6} \Leftarrow r = \frac{2}{3}$$

بالتعويض في (١) نجد أن :

$$٦ = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times r^2 \Leftarrow ٦ = (1 - \frac{2}{3}) \frac{2}{3} \times r^2$$

$$٦ = \frac{2}{3} \times r^2 - \Leftarrow$$

$$٥٤ = ٢٢ - \Leftarrow$$

$$٢٧ - = ٢ \Leftarrow$$

للتسوية :

للحصول على المتتابعة الهندسية نضرب الحد السابق في الأساس فنحصل على الحد اللاحق .

∴ المتتابعة : ( - ٢٧ ، - ١٨ ، - ١٢ ، - ٨ ، ..... )

## تمارين إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

**٤** متتابعة هندسية مكونة من ثلاثة حدود مجموعها ٢١ ، وحاصل

ضربها ٦٤ أوجد هذه الحدود .

الحل :

من قانون الحد العام نجد أن صورة الحدود الثلاثة المتتالية هي :  $٢١$  ،  $٢١$  ،  $٢١$

$$\therefore ٢١ = ٢١ + ٢١ + ٢١ \dots\dots\dots (١)$$

$$٦٤ = ٢١ \times ٢١ \times ٢١ = ٢١ \times ٢١ \times ٢١$$

$$٦٤ = (٢١)^3 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow ٢١ = ٤ \Leftarrow ٤ = ٢١ \Leftarrow \frac{٤}{٢١}$$

الآن : بالتعويض بقيمة  $٢١$  في (١) نجد أن :

$$٢١ = \frac{١٦}{٢١} + ٢١ \Leftarrow ٢١ = \frac{١٦}{٢١} + ٤ + ٢١$$

$$\Leftarrow ٢١ = \frac{١٦}{٢١} + ٢١ \Leftarrow ٢١ = \frac{١٦}{٢١} + ٢١ \Leftarrow ٢١ = \frac{١٦}{٢١} + ٢١$$

$$\Leftarrow ٠ = ١٦ + ٢١٧ - ٢١ \Leftarrow$$

$$\Leftarrow ٠ = (١٦ - ٢١)(١ - ٢١) \Leftarrow$$

$$\therefore ١٦ = ٢١ ، ١ = ٢١$$

وإذا كانت :  $٢١ = ١ \Leftarrow ٢١ = ٤$  ، بينما إذا كانت :  $٢١ = ١٦ \Leftarrow ٢١ = \frac{١}{٢١}$  .

إذا كانت  $٢١ = ٤$  ستكون حدود المتتابعة : ( ١٦ ، ٤ ، ١ )

بينما إذا كانت  $٢١ = \frac{١}{٢١}$  ستكون الحدود : ( ١ ، ٤ ، ١٦ )

## نمارين إضافية على درس : المتتابعات الهندسية

### سؤال خاص للجوابين :

إذا كانت :  $(1P, 2P, 3P, \dots)$  متتابعة حسابية أساسها  $P$  ، أثبت أن :

$(1P, 2P, 3P, \dots)$

تمثل متتابعة هندسية وأوجد أساسها .

الحل :

أولاً :

∴ المتتابعة :  $(1P, 2P, 3P, \dots)$  حسابية

$$\leftarrow P = 2P - 1P, \quad P = 3P - 2P$$

لإثبات نطلق من تعريف المتتابعة الهندسي وهو أن النسبة بين كل حدين دائماً مقداراً ثابتاً ، فإذا تحقق ذلك تكون المتتابعة هندسية .

الآن :  $2P - 1P = 1P, \quad 3P - 2P = 1P$  ( من خصائص الأسس )

( معطى أن :  $P = 2P - 1P$  )  $2P - 1P = 1P$

هناك :  $3P - 2P = 1P, \quad 4P - 3P = 1P$

$$2P - 1P = 1P$$

واضح أن النسبة بين كل حدين = مقداراً ثابتاً

$\leftarrow$  المتتابعة هندسية وأساسها  $1P$



## الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

### تعريف الأوساط الهندسية :

الأوساط الهندسية بين العددين  $p$  و  $b$  هي عبارة عن حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول  $p$  و حدها الأخير  $b$  وعُرف عدد حدودها مسبقاً .

### نذكر أن :

$$① \text{ عدد الحدود} = \text{عدد الأوساط} + 2 .$$

$$② \text{ لإيجاد قيمة } r \text{ في حالة الأوساط الهندسية نستخدم القانون : } r^{n-1} = \frac{b}{p}$$

حيث :  $p$  : الحد الأول ،  $b$  : الحد الأخير ،  $n$  : عدد الحدود ،  $r$  : الأساس .

### حالة خاصة :

إذا كان المطلوب وسطاً هندسياً واحداً فقط فإن : الوسط الهندسي  $= \sqrt[p \times b]{p \times b}$

## الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

**مثال :**

أدخل وسطين هندسيين بين العددين :  $7 -$  ،  $\frac{189}{8}$  .

**الحل :**

$$\boxed{\frac{189}{8}} , \boxed{\phantom{00}} , \boxed{\phantom{00}} , \boxed{7-}$$

∴ المطلوب وسطين ← عدد الحدود = عدد الأوساط + 2 = 4

$$\frac{27}{8} - = \frac{1}{7} - \times \frac{189}{8} = 7 - \div \frac{189}{8} = 3 \text{ ر} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \text{ر} - \frac{3}{4} \quad (\text{بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين})$$

$$\therefore \text{المتابعة هي : } 7 - , \frac{21}{4} , \frac{63}{4} , \frac{189}{8}$$

$$\therefore \text{الوسطان هما : } \frac{21}{4} , \frac{63}{4}$$

**مثال :** أدخل أربعة أوساط هندسية بين :  $64$  ،  $2 -$

**الحل :**

$$\therefore \text{ر} = \sqrt[4]{\frac{6}{4}} , \sqrt[4]{6} = 2 , \sqrt[4]{64} = 2 , \sqrt[4]{64} = 2$$

$$\Leftarrow \text{ر} = \sqrt[4]{\frac{6}{4}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \Leftarrow \text{ر} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \Leftarrow \text{ر} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \Leftarrow \text{ر} = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \text{الأوساط هي : } 2 - , 16 , 32 , 4$$

## الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

**مثال :**

أدخل وسطاً هندسياً بين : ٦ ، ١٥٠ .

**الحل :**

$$\sqrt[p \times b]{\text{الوسط الهندسي}} =$$

$$\Leftarrow \text{الوسط الهندسي} = \sqrt[6 \times 150]{\text{الوسط الهندسي}} = \sqrt[900]{\text{الوسط الهندسي}} = 30 .$$

**مثال :**

إذا كان لدينا عددين موجبان الفرق بينهما ٧ ووسطهما الهندسي ١٢ فما هما العددان ؟

**الحل :**

نفرض أن العددين هما : ٧ ، ١٢ .

$$\therefore \text{الفرق بينهما} = 7$$

$$\Leftarrow 12 = 7 = 12 - 7 = 12 + 7 = 12 \quad \text{①} \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{وسطهما الهندسي} = 12$$

$$\Leftarrow 12 = \sqrt[p \times b]{\text{الوسط الهندسي}}$$

بتريع الطرفين نجد أن :

$$\text{②} \dots\dots\dots 144 = b \times p$$

بتعويض ① في ② نجد أن :

$$144 = b \times (b + 7)$$

$$\Leftarrow b^2 + 7b - 144 = 0$$

$$\Leftarrow (b - 9)(b + 16) = 0$$

$$\therefore \text{إما } b = 9 \Leftarrow p = 16$$

$$\text{أو } b = 16 \Leftarrow p = 9 .$$

بالتحليل

## تطبيقات على الدرس الخامس : الأوساط الهندسية :

١ أدخل الأوساط المطلوبة فيما يلي :

① وسطين هندسيين بين : ٩ ، - ٢٤٣ .

② وسطاً هندسياً بين : ٦ ، ١٥٠ .

٢ إذا كان الوسط الحسابي بين عددين :  $\frac{1}{4}$  ، والوسط الهندسي

بينهما = ٦ ، فأوجد هذين الحدين .

٣ الوسط الهندسي الرابع بين حدين ٨١ ، والوسط الهندسي الأول

بينهما ٢٤ ، أوجد هذه المتتابعة .

٤ كم وسطاً هندسياً يمكن إدخاله بين الحدين : ٢ ، ٤٨٦ من

متتالية هندسية أساسها ٣ .

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية

### المنتهية

#### تعريف :

إذا كانت  $\{C_n\}$  متتابعة حسابية منتهية ، أو متتابعة هندسية منتهية فإن المجموع :

$$جم = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_m = \sum_{n=1}^m C_n$$

يسمى متسلسلة حسابية منتهية أو متسلسلة هندسية منتهية عدد حدودها  $m$  .

#### حيث :

$C_m$  : الحد الأخير للمتسلسلة .  $m$  : رتبة الحد الأخير أو عدد الحدود .

$\sum_{n=1}^m C_n$  : الصورة المختصرة للمتسلسلة بالاستفادة من رمز المجموع .

#### مثال :

يُبين نوع كل المتسلسلة واكتبها بصورة مختصرة :

$$① ٦ + ١٠ + ١٤ + ١٨ + \dots + (٢ + ٢٤)$$

#### الحل :

$$① جم = ٦ + ١٠ + ١٤ + ١٨ + \dots + (٢ + ٢٤)$$

$$\Leftarrow \begin{cases} C_2 - C_1 = ١٠ - ٦ = ٤ \\ C_3 - C_2 = ١٤ - ١٠ = ٤ \end{cases} \Leftarrow \text{المتسلسلة حسابية}$$

$$C_n = (٢ + ٤n)$$

$$\Leftarrow جم = \sum_{n=1}^n C_n = \sum_{n=1}^n (٢ + ٤n) .$$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

### مثال :

بيّن نوع كل متسلسلة واكتبها بصورة مختصرة :

$$\textcircled{1} \quad (1 - 25) + \dots + 19 + 14 + 9 + 4$$

$$\textcircled{2} \quad (1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)) + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2$$

### الحل :

$$\textcircled{1} \quad \text{جم} = (1 - 25) + \dots + 19 + 14 + 9 + 4$$

$$\leftarrow \begin{cases} 5 = 4 - 9 = r - r \\ 5 = 9 - 14 = r - r \end{cases} \text{ المتسلسلة حسابية}$$

$$(1 - 25) = r$$

$$\leftarrow \text{جم} = r = \sum_{i=1}^n r = 2 + 4 + \dots + 25$$

### تغيير :

استنتاج الحد العام من قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية :  $r = 2 + (n-1) \times 5$

### الحل :

$$\textcircled{2} \quad (1 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)) + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2$$

$$\leftarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = 2 \div 1 = r \div r \\ \frac{1}{2} = 1 \div \frac{1}{2} = r \div r \end{cases} \text{ المتسلسلة هندسية}$$

$$r = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\leftarrow \text{جم} = r = \sum_{i=1}^n r = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

**مثال :**

اكتب المتسلسلة التالية بصورة مفصلة وبيّن نوعها :

$$\textcircled{1} \text{ جم } \sum_{i=1}^3 2^i = \textcircled{2} \text{ جم } \sum_{i=1}^3 2 \times 3^{i-1} = \textcircled{3} \text{ جم } \sum_{i=1}^3 (2 + 5)$$

**الحل :**

$$\textcircled{1} \text{ جم } \sum_{i=1}^3 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

واضح جداً أن المتسلسلة هندسية .

$$\textcircled{2} \text{ جم } \sum_{i=1}^3 2 \times 3^{i-1} = 2 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + \dots$$

كذلك واضح جداً أن المتسلسلة هندسية .

$$\textcircled{3} \text{ جم } \sum_{i=1}^3 (2 + 5) = (2 + 5) + (2 + 5) + (2 + 5) + \dots$$

واضح جداً أن المتسلسلة حسابية .

**فأوة مهمة :**

١ المتتابعة أو المتسلسلة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى على الصورة :  $(a + n \cdot d)$  ،

وأساسها هو :  $d$  معامل الجهدول .

٢ المتتابعة أو المتسلسلة الهندسية هي دالة أسية على الصورة :  $(a \times r^{n-1})$  ، وأساسها هو :

$r$  ، وحدها الأول هو :  $a$  .





## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

ويمكن تلخيص قوانين المتسلسلة الحسابية في النظرية التالية :

### نظرية :

لتكن  $\sum_{n=1}^m a_n$  حيث  $\{a_n\}$  متتابعة حسابية منتهية حدها الأول  $a$  ، وأساسها  $r$  ، وعدد حدودها  $m$  ، فإن مجموعها يُعطى بالعلاقين التاليين :

①  $\sum_{n=1}^m a_n = \frac{r}{r-1} [a \times (1-r) + a_m]$  ؛ الصورة العامة

②  $\sum_{n=1}^m a_n = \frac{r}{r-1} [a + a_m]$  ؛ حالة خاصة

### حيث :

$a$  : الحد الأول . ،  $r$  : أساس المتتابعة . ،  $m$  : عدد الحدود .

$a_m$  : الحد الأخير . ،  $\sum_{n=1}^m a_n$  : مجموع الحدود .

### مثال :

أوجد مجموع المتسلسلات التالية :  $\sum_{n=1}^4 (1 + 2^n)$

### الحل :

المتسلسلة واضح أنها حسابية لأنها دالة من الدرجة الأولى أساسها معامل  $2^n$  أي أن  $r = 2$  .

ولإيجاد الحد الأول نعوض عند  $n = 1$  فنجد أن :  $a = 3$  .

نعوض في القانون :  $\sum_{n=1}^4 a_n = \frac{r}{r-1} [a \times (1-r) + a_m]$  حيث :  $r = 2$  ،

$$\therefore \sum_{n=1}^4 a_n = \frac{2}{2-1} [3 \times (1-2) + 19] = 2 \times 16 = 32 .$$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

**مثال :**

أوجد مجموع الأربعين الحد الأولى من المتتابعة الحسابية التالية : ( ٣ ، ٧ ، ١١ ، .... )

**الحل :**

المتتابعة حسابية فيها :

$$٣ = ١ , ٤ = ٢ , ٤٠ = ٣$$

$$ج. = \frac{٢}{٣} [ ٤ \times (١ - ٣) + ٣٢ ]$$

$$\Leftarrow ج. = \frac{٢}{٣} [ ٤ \times ٣٩ + ٦ ]$$

$$= \frac{٢}{٣} [ ١٥٦ + ٦ ]$$

$$= ١٦٢ \times ٢٠ =$$

$$\therefore ج. = ٣٢٤٠$$

**مثال :**

أوجد مجموع المتسلسلات التالية :  $\sum_{n=1}^6 (١ + ٣٠٠)$  ج. =

**الحل :**

$$ج. = ١ + ٣٠٠ + ..... + ٣٠٠ + ١$$

$$= ١ + ..... + ١٠ + ٧ + ٤ =$$

واضح أن المتسلسلة حسابية حيث :

$$ج. = \frac{٢}{٣} [ ٣٠٠ + ١ ] , ٤ = ١ , ٢٠ = ٣ , ٣٠٠ = ١$$

$$\Leftarrow ج. = \frac{٢}{٣} [ ٣٠١ + ٤ ]$$

$$= ٦٥ \times ١٠ =$$

$$= ٦٥٠$$

**مثال :** مجموع الأربعين الحد الأولى من متتابعة حسابية ٤٣٠ ومجموع أول ستين حداً منها هو ٩٤٥ أوجد الحد العاشر لهذه المتتابعة .

**الحل :**

**أولاً :** نضع المعطيات بصورة رياضية :

$$ج.١ = ٤٣٠ ، ج.٢ = ٩٤٥ ، المطلوب : ج.١٠ .$$

لإيجاد أي حد من المتتابعة نحتاج إلى قيم :  $P$  ،  $s$  .

**الآن :** من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية :  $ج.م = \frac{P}{r} [s \times (1 - r) + P^2]$

**حيث :**  $M$  : عدد الحدود ،  $P$  : الحد الأول ،  $s$  : أساس المتتابعة .

$$\Leftarrow ج.١ = ٤٣٠ = \frac{P}{r} [s \times 39 + P^2]$$

$$\Leftarrow ٤٣٠ = \frac{P}{r} [٧٨٠ + P^2] \dots\dots\dots (١)$$

**هناك :**

$$ج.٢ = ٩٤٥ = \frac{P}{r} [s \times ٥٩ + P^2]$$

$$\Leftarrow ٩٤٥ = \frac{P}{r} [١٧٧٠ + P^2] \dots\dots\dots (٢)$$

**الآن :** بضرب (١) في :  $-١,٥$  نجد أن :

$$-٦٤٥ = \frac{P}{r} [١١٧٠ - P^2] \dots\dots\dots (٣)$$

**الآن :** بجمع : (٢) + (٣) نجد أن :

$$٣٠٠ = ٦٠٠ = \frac{P}{r} \Leftarrow \frac{1}{r} = s$$

بالتعويض بقيمة :  $s$  في (١) نجد أن :

$$٤٣٠ = ٤٠ + ٣٩٠ = P^2 \Leftarrow P = ٢٠$$

$$\therefore \text{الحد العاشر} = ج.١٠ = P + ٩ \times s$$

$$\Leftarrow ج.١٠ = ١ + ٩ \times \frac{1}{r}$$

$$\Leftarrow ج.١٠ = ٥$$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية

**مثال :**

أوجد عدد حدود المتسلسلة :  $\sum_{i=0}^4 (2 - 16) = \text{صفر}$  .

## الحل :

$$(16-22) + \dots + (10-10) + (12-12) + (14-14) = (16-22) \sum_{i=1}^4 1 = \text{جم}$$

واضح أن المتسلسلة حسابية :  $9 = - 14 \quad 6 = 2$

بالتعويض في القانون العام :  $\text{جم} = \left[ \frac{2}{\epsilon} + 22 \right] \times (1 - \mu) + \epsilon$

حیث: جم = صفر ، ۱ = -۱۴ ، ۶ = ۷

$$\left[ \begin{array}{cccc} 2 & -2 & 2 & - \end{array} \right] \frac{f}{2} = \text{صفر} \therefore$$

$$\left[ \begin{array}{cc} ۳۰ & -۲۶ \end{array} \right] \frac{۲}{۶} = \text{صفر} \Leftarrow$$

$$1 = 10 - 9 \Leftarrow$$

$$1 = (10 - 2)2 \Leftarrow$$

⇐ إما  $m = 0$  مرفوض أو  $m = 15$  مقبول وهو عدد الحدود .

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية

### المنتهية

**مثال :**

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية :

$$ج_{١٩} = \sum_{n=1}^{19} ح_n , \text{ علماً بأن : } ح_{١٢} = ١٣٠ , ح_{١٩} = ١١٦$$

**الحل :**

∴ المتسلسلة حسابية منتهية  $\Leftarrow$  ج م  $= \frac{م}{٢} [ ح + ٩ ]$

$$① \dots\dots\dots ح_{١٢} = ١٣٠ = ٩ + ١١ = ١٣٠$$

$$② \dots\dots\dots ح_{١٩} = ١١٦ = ٩ + ١٨ = ١١٦$$

بطرح ② - ① نجد أن :  $٧ = ٩ - ١٤ \Leftarrow ٩ - ٢ = ٧$

وبالتعويض في ① نجد أن :  $١٥٢ = ٩$

$$\therefore ج م = \frac{م}{٢} [ ح + ٩ ]$$

$$\Leftarrow ج_{١٩} = \frac{١٩}{٢} [ ١١٦ + ١٥٢ ] = \frac{١٩}{٢} \times ٢٦٨ = ١٣٤ \times ١٩ = ٢٥٤٦$$

## نهارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

١ أوجد مجموع الحدود الستين الأولى من المتتالية الحسابية : ( - ٧ ، - ٢ ، ٣ ، ..... )

٢ متتابة حسابية  $u_n = 7$  ،  $u_{13} = 40$  أوجد المتتابة ثم أوجد  $\sum_{n=1}^{19} u_n = ?$

٣ إذا كان مجموع المتسلسلة الحسابية  $u_n = - (3n + 5)$  ،  $u_{15} = 215$  ، فما هو عدد الحدود  $n$  .

٤ تعهد مقاول في بناء مشروع بأنه في حالة تأخره في بناء المشروع فإنه يدفع غرامة في اليوم الأول ١٠٠٠ ريال ، أما الأيام الأخرى فإنه يدفع في كل يوم غرامه تزيد ٥٠ ريالاً عن اليوم السابق له ، فإذا كان مجموع الغرامات التي دفعها المقاول هو ١٥٣٠٠ ريالاً فكم عدد أيام التأخير .

٥ متسلسلة حسابية مجموع الحدود الستة الأولى منها  $= - 42$  ، ومجموع الحدود الستة الأخيرة منها  $= 30$  فإذا كان عدد حدودها  $= 12$  ، أوجد :

١ أساسها      ٢ حدها الأول      ٣ حدها الأخير

### سؤالان للجوابين :

١ أثبت أن مجموع  $u_n$  حداً الأولى من الأعداد الفردية الموجبة :

$$u_n = (1, 3, 5, \dots, 2n-1)$$

٢ أوجد مجموع المتسلسلة :

$$1 - 3 + 5 - \dots + 2001 - 2003 + 2005 - 2007$$

## تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

١ أوجد مجموع الحدود الستين الأولى من المتتالية الحسابية :

$$(-7, -6, -5, \dots)$$

الحل :

$$\therefore \text{المتتابعة حسابية} \Leftarrow p = -7, s = -6, m = 60$$

$$\therefore \text{جم} = \frac{m}{2} [s \times (-1 - m) + p^2]$$

$$\Leftarrow \text{ج} = \frac{60}{2} [-6 \times 59 + 49 \times 2]$$

$$\Leftarrow \text{ج} = 30 \times [-118 + 98]$$

$$\Leftarrow \text{ج} = 30 \times -20$$

$$\therefore \text{ج} = -600$$

## نهارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

٢ متتابة حسابية  $ح_٦ = ٧$  ،  $ح_{١٣} = ٤٠$  أوجد المتتابة  
، ثم أوجد  $\sum_{٦=١}^{١٩} ح_٦ = ج_{١٩}$  .

الحل :

المطلوب : ١ المتتابة . ٢ مجموع تسعة عشر حداً منها .

$$\therefore ح_٦ = ٧ \Leftarrow ٧ = ٤ + ٣ \quad (١) \dots\dots\dots$$

$$\therefore ح_{١٣} = ٤٠ \Leftarrow ٤٠ = ٤ + ١٢ + ٢٤ \quad (٢) \dots\dots\dots$$

بضرب المعادلة (١)  $\times - ١$  ، وجمعها مع المعادلة (٢) : نجد أن :

$$١١ = ٤ + ٣٣ \Leftarrow ٣ = ٤$$

بالتعويض عن قيمة ٤ في (١) نجد أن :  $٣ = ٤$  .

∴ المتتابة هي : ( ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ..... )

$$ج_{١٩} = \frac{١٩}{٢} [ ٣ \times ١٨ + ٤ \times ٢ ]$$

$$= \frac{١٩}{٢} [ ٥٤ + ٨ ]$$

$$= \frac{١٩}{٢} \times ٦٢$$

$$\therefore ج_{١٩} = ٥٨٩$$



## تمارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

٣ إذا كان مجموع المتسلسلة الحسابية ج م  $= \sum_{i=1}^n (5 + 3i)$  ،  
فما هو عدد الحدود م .

الحل :

$$ج م = \sum_{i=1}^n (5 + 3i) = (8 + 11 + 14 + 17 + \dots) = 215$$

واضح أن :  $8 = 2$  ،  $3 = 6$

∴ من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية ج م  $= \frac{m}{2} [2 \times (1 - m) + 17]$  نجد أن :

$$215 = \frac{m}{2} [2 \times (1 - m) + 17]$$

$$\Leftrightarrow 215 = \frac{m}{2} [2 - 2m + 17]$$

$$\Leftrightarrow 215 = \frac{m}{2} [19 - 2m]$$

$$\Leftrightarrow 430 = m [19 - 2m]$$

$$\Leftrightarrow 430 = 19m - 2m^2 \quad \text{— بالتحويل أو غيرها من الطرق —}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 19m + 430 = 0 \quad \text{— مقبول —} \quad \text{— مرفوض —}$$

∴ عدد الحدود = ١٠ حدود .

## نهارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

٤] تعهد مقاول في بناء مشروع بأنه في حالة تأخره في بناء المشروع فإنه يدفع غرامة في اليوم الأول ١٠٠٠ ريال ، أما الأيام الأخرى فإنه يدفع في كل يوم غرامه تزيد ٥٠ ريالاً عن اليوم السابق له ، فإذا كان مجموع الغرامات التي دفعها المقاول هو ١٥٣٠٠ ريالاً فكم عدد أيام التأخير .

الحل :

∴ المقاول سيدفع في اليوم الأول ١٠٠٠ ريالاً .

في اليوم الثاني سيدفع : ١٠٥٠ ريالاً .

في اليوم الثالث سيدفع : ١١٠٠ ريال . وهكذا .

∴ ماسيدفعه المقاول من غرامات تمثل متتابعة حسابية جدها الأول  $u = 1000$

وأساسها  $r = 50$  .

مجموع الغرامات التي دفعها المقاول = ١٥٣٠٠ ريال .

$\Leftarrow$  جم = ١٥٣٠٠ .

المطلوب عدد أيام التأخير =  $m$  .

∴ من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية  $جم = \frac{u}{r} [ (1 - r^m) + r^m ]$  نجد أن :

$$\frac{15300}{50} = \frac{1000}{50} [ (1 - 50^m) + 50^m ]$$

$$\Leftarrow 306 = 1950 + 50^m$$

$$\Leftarrow 50^m = 306 - 1950 = -1644 \quad \text{— بالتحليل أو بغيرها من الطرق —}$$

$$\Leftarrow m = 12 \text{ — مقبول —} , \quad m = 51 \text{ — مرفوض —}$$

∴ عدد أيام التأخير = ١٢ يوماً .

## نهارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

٥ متسلسلة حسابية مجموع الحدود الستة الأولى منها  $= - ٤٢$  ، ومجموع الحدود الستة الأخيرة منها  $= ٣٠$  فإذا كان عدد حدودها  $= ١٢$  ، أوجد :

① أساسها      ② حدها الأول      ③ حدها الأخير

الحل :

∴ مجموع الحدود الستة الأولى منها  $= - ٤٢$

$$\begin{aligned} - ٤٢ &= p + p + p + p + p + p + p + p + p + p + p + p \\ &= ١٥p + ٦ \quad (١) \end{aligned}$$

∴ مجموع الحدود الستة الأخيرة منها  $= ٣٠$

$$\begin{aligned} - ٤٢ &= p + p + p + p + p + p + p + p + p + p + p + p \\ &= ٥١p + ٦ \quad (٢) \end{aligned}$$

بطرح : (١) - (٢) نجد أن :

$$- ٣٦ = ٥٠p \Rightarrow p = - ٢$$

بالتعويض في (١) نجد أن :  $- ٧٢ = ٥٠p$

الحد الأخير  $= ١٢p = - ٢٤$

$$\Rightarrow - ٥٠ = ١٢p$$

## نهارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

#### سؤالان للجوابين :

١ أثبت أن مجموع  $n$  حداً الأولى من الأعداد الفردية الموجبة :

$${}^nS = (1, 3, 5, \dots, n^2 - 1)$$

الحل :

تمثل متسلسلة حسابية فيها :  $1 + 3 + 5 + \dots + n^2 - 1$

$p = 1$  ،  $q = 2$  ، عدد الحدود  $m = n$  .

∴ من قانون مجموع المتسلسلة الحسابية  $J_m = \frac{m}{2} [p + q \times (1 - m)]$  نجد أن :

$$J_n = \frac{n}{2} [2 + n^2 - 1]$$

$$\Leftarrow J_n = \frac{n}{2} [n^2 + 1]$$

$$\Leftarrow J_n = n^2$$

∴ مجموع  $n$  حداً من الأعداد الفردية  $= n^2$

## نهارين على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

#### سؤالان للجوابين :

٢ أوجد مجموع المتسلسلة :

$$1 - 3 + 5 - \dots + 2001 - 2003 + 2005 - 2007$$

الحل :

نلاحظ أن الفرق بين كل حدين  $= 2$   
∴ نستطيع أن نستنتج المجموع إذا استطعنا معرفة عدد الحدود لهذه المتسلسلة حيث أن المجموع سوف يساوي :

$$( \text{عدد الحدود} \div 2 ) \times 2 \Leftarrow \text{المجموع} = \text{عدد الحدود} .$$

الآن : كيف نستنتج عدد الحدود ؟

نستطيع أن نستفيد من مفهوم المتتابعة الحسابية لاستنتاج عدد الحدود كالتالي :

$$( 1 , 3 , 5 , \dots , 2001 , 2003 , 2005 , 2007 )$$

هذه المتتابعة حسابية فيها :

$$1 = 1 , \quad 2007 = 2007 , \quad 2003 = 2003 , \quad 2001 = 2001$$

رتبة الحد الأخير = عدد الحدود

∴ من قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية :  $2007 = 1 + (n - 1) \times 2$  نجد أن :

$$2007 = 1 + (n - 1) \times 2$$

$$2006 = (n - 1) \times 2 \Rightarrow n - 1 = 1003 \Rightarrow n = 1004$$

∴ مجموع المتسلسلة  $= 1004$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

### استنتاج قوانين مجموع المتسلسلة الهندسية :

لنكن لدينا المتسلسلة : ( ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ، ٢ ) المتسلسلة هذه حسابية وهندسية !!

هندسية لأن النسبة بين كل حدين مقداراً ثابتاً = ١ .

$$\text{لإيجاد مجموعها : } ١٠ = ٢ \times ٥ = ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ = \text{جم}$$

∴ نستطيع أن نستنتج مجموع المتسلسلة الهندسية إذا كان أساسها  $r = ١$  كالتالي :

$$\text{جم} = ٢ \times ٥ ، \text{حيث : } ٥ : \text{الحد الأول} ، ٢ : \text{عدد الحدود} .$$

الآن : إذا كانت  $r \neq ١$  فكيف نستنتج مجموع هذه المتسلسلة الهندسية ؟

نفرض أن ح<sub>٥</sub> متتالية هندسية مجموع ٥ حداً منها = جم فإن :

$$\text{جم} = ٢ + ٢ر + ٢ر^٢ + ٢ر^٣ + ٢ر^٤ \dots\dots\dots (١)$$

بضرب : (١)  $\times r$  نجد أن :

$$r \text{ جم} = ٢ر + ٢ر^٢ + ٢ر^٣ + ٢ر^٤ + \dots\dots\dots (٢)$$

بطرح : (١) - (٢) نجد أن :

$$\text{جم} - r \text{ جم} = ٢ - ٢ر$$

$$\Leftrightarrow \text{جم} (١ - r) = ٢ (١ - r)$$

$$\Leftrightarrow \text{جم} = \frac{٢ (١ - r)}{١ - r}$$

$$\Leftrightarrow \text{جم} = \frac{٢ (١ - r)}{١ - r}$$

وهو القانون العام لمجموع المتسلسلة الهندسية .

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

سوف نرتب قوانين مجموع المتسلسلة الهندسية في النظرية التالية :

### نظرية :

لتكن  $\sum_{i=1}^n C_i = \text{جم}$  حيث  $\{C_i\}$  متتابعة هندسية منتهية حدها الأول  $P$  ، وأساسها  $r$  ، وعدد حدودها  $m$  ، فإن مجموعها يُعطى بالعلاقات التالية :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{P(1-r^m)}{1-r}, \quad r \neq 1 \\ Pm, \quad r = 1 \end{array} \right\}$$

### مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية :  $\sum_{i=1}^{10} 2^{i-1}$  .

### الحل :

$$\text{جم} = \sum_{i=1}^{10} 2^{i-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

واضح أن :  $r = 2$  ،  $P = 1$  ،  $m = 10$

$$\therefore \text{جم} = \frac{P(1-r^m)}{1-r}$$

$$\Leftarrow \frac{(1-2^{10}) \times 1}{1-2}$$

$$\Leftarrow \frac{(1-1024)}{1}$$

$$\therefore \text{جم} = 1023$$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

### مثال :

متتابعة هندسية حدها الأول ٤ والآخر ٥١٢ فإذا كان كل حد هو ضعف الحد الذي يسبقه فأوجد مجموعها .

### الحل :

المتتابعة هي : ( ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ..... ، ٥١٢ )

واضح أن :  $r = 2$  ،  $a = 4$  ،  $u_n = 512$

من الحد العام للمتسلسلة الهندسية :  $u_n = a \times r^{n-1}$  ، نجد أن :

$$512 = 4 \times 2^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 128$$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^7 \Leftrightarrow n-1 = 7 \Leftrightarrow n = 8$$

∴ عدد الحدود = ٨

$$\therefore \text{ح م} = \frac{(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - 2^8) \times 4}{1 - 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - 256) \times 4}{1}$$

$$\therefore \text{ح م} = 1020$$



## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

**مثال :**

أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية حيث :  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n (2 - 1) = 129$  .

**الحل :**

المتابعة بعد فكها :  $(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \dots + \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}) \times (2 - 1) = 129$  .

واضح أن :  $r = \frac{3}{4}$  ،  $a = 1$  ،  $n = ?$  .

$$\therefore \text{حجم} = \frac{(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$\frac{(1 - (\frac{3}{4})^n) \times 1}{1 - \frac{3}{4}} = 129 \Leftarrow$$

$$1 - (\frac{3}{4})^n = 129 - \Leftarrow$$

$$(\frac{3}{4})^n = 128 - \Leftarrow$$

$$(\frac{3}{4})^n = (\frac{3}{4})^7 \Leftarrow$$

$$7 = n \Leftarrow$$

$\therefore$  عدد حدود المتسلسلة الهندسية هو سبعة حدود .

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

### مثال :

ما نوع المتتابعة التالية ثم أوجد مجموع عشرين حد فيها :

$$ج م = ( ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ..... )$$

### الحل :

من تطبيق مفهوم المتتابعة الحسابية نجد أن الفرق بين كل حدين يساوي مقداراً ثابتاً دائماً وهو الصفر .

كذلك إذا طبقنا مفهوم المتتابعة الهندسية نجد أن ناتج حاصل القسمة بين كل حدين يساوي دائماً مقداراً ثابتاً وهو الواحد .

∴ هذه المتتابعة حسابية و هندسية .

عند تطبيق قانون مجموع المتسلسلة الحسابية نجد أن :

$$ج م = \frac{n}{2} [ ٢ + ح م ] \Leftarrow ج م = ١٠ \times [ ٣ + ٣ ] = ٦٠ .$$

عند تطبيق قانون مجموع المتسلسلة الهندسية نجد أن :

$$ج م = \frac{٢( ١ - ح م )}{١ - ٢} = ٢ \times ١ = ٢ \Leftarrow ج م = ٢٠ \times ٣ = ٦٠ .$$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

**مثال :**

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$$ج ه = \sum_{n=1}^{\infty} ح = ح_1 , ح_2 = \frac{1}{3} , ح_3 = 9 .$$

**الحل :**

من قانون استنتاج أساس المتتابعة الهندسية إذا علم حدان فيها نجد أن :

$$\frac{9}{\frac{1}{3}} = ح_3 \Leftarrow \frac{ح_2}{ح_1} = ح_3 \Leftarrow \frac{ح_2}{ح_1} = ح_3$$

$$27 = ح_3 \Leftarrow$$

$$3 = ح_1 \Leftarrow$$

$$3 = ح_1$$

$$\therefore ح_1 = ح_2 = \frac{1}{3} \Leftarrow 9 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Leftarrow \frac{1}{27} = ح_3$$

$$\therefore ح = \frac{(1 - ح_3)}{1 - ح_1} = ح$$

$$\Leftarrow ح = \frac{(1 - 27)}{1 - 3} = ح$$

$$\Leftarrow ح = \frac{(1 - 243)}{2} = ح$$

$$\Leftarrow ح = \frac{121}{27} = ح$$

$$\therefore ح = \frac{121}{27}$$

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية التي فيها :

$$\frac{16}{195} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

الحل :

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

- ١ إذا كانت ج ه متسلسلة هندسية مجموعها ١٢١ وأساسها ٣ فأوجد حدها الأول .
- ٢ أوجد عدد حدود المتسلسلة الهندسية حيث :  $\sum_{i=1}^n u_i = 254$  .
- ٣ باستخدام مفهوم المتتابعة الحسابية أوجد مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على ٥ والواقعة بين العدد ٥٤ و ٦١٨ .
- ٤ أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي فيها  $u_1 = 3$  وحدها الأخير  $u_n = 48$  وكل حد فيها ضعف الحد السابق له .
- ٥ إذا كانت مبيعات إحدى الشركات في السنة المنصرمة ١٠ ملايين ريال وكانت الزيادة المتوقعة في كل سنة هي ٥% فبكم يتوقع أن تباع الشركة في السنة الخامسة ؟ وما هو مجموع المبيعات خلال ٨ سنوات ؟

### سؤال خاص للجوابين :

إذا كان:  $u_n = \frac{1}{n} [u_1 + u_n]$  ، أثبت أن :

( س ، ص ، ع ) تمثل متسلسلة هندسية .

## الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

٥ إذا كانت مبيعات إحدى الشركات في السنة المنصرمة ١٠ ملايين ريال وكانت الزيادة المتوقعة في كل سنة هي ٥% فكم يتوقع أن تباع الشركة في السنة الخامسة ؟ وما هو مجموع المبيعات خلال ٨ سنوات ؟

الحل :

قاعدة :

في مثل هذه المسائل إذا جاءت الزيادة أو النقصان بنسبة مئوية مثلاً: هـ % فهذا يعني أن المتتابعة هندسية أساسها :  $ر = هـ \% + ١$  إذا كانت بالزيادة ، أو  $ر = هـ \% - ١$  إذا كانت بالنقصان .

في مثالنا هذا نجد أن الزيادة ٥%  $\Rightarrow ر = ١ + \frac{٥}{١٠٠} = ١,٠٥$   $\Rightarrow ر = ١,٠٥$   $\therefore$  ستكون المتتابعة على الصورة :

( ..... ، ١١,٠٢٥,٠٠٠ ، ١٠,٥٠٠,٠٠٠ ، ١٠,٠٠٠,٠٠٠ )

واضح أن :  $١٠ = ٩$

المطلوب :

١ مبيعات الشركة في السنة الخامسة أي : ح هـ :

$$\Leftarrow ح هـ = ٩ \times ر = ح هـ \Leftarrow ح هـ = ١٠ \times (١,٠٥) \Leftarrow ح هـ = ١٢,١٥٥,٠٦٢,٥ .$$

٢ مجموع المبيعات خلال ثمان سنوات أي : ج هـ :

$$\Leftarrow ج هـ = \frac{(١ - ر^٨)}{(١ - ر)}$$

$$\Leftarrow ج هـ = \frac{(١ - (١,٠٥)^٨)}{(١ - ١,٠٥)}$$

$$= \frac{٠,٤٧٧٥ \times ١٠}{٠,٠٥} = ٩٥,٥٠٠,٠٠٠ =$$

## تمارين إضافية على الدرس السابق : المتسلسلات الحسابية

### والهندسية المنتهية

- ١ أوجد مجموع :  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{64}$  .
- ٢ إذا كانت :  $(3, h, \dots, h+4, 23)$  تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة  $h$  ، ثم أوجد عدد حدود المتتابعة ، ومجموعها .
- ٣ كم حداً يلزم أخذه من المتسلسلة الحسابية :  $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  ليصبح المجموع : ٢٠٤ .
- ٤ أوجد مجموع الأعداد المحصورة بين ١٠٠ ، و ٥٠٠ في الحالتين التاليتين :  
١ تقبل القسمة على ٥ .  
٢ لا تقبل القسمة على ٥ .
- ٥ اشترى رجل سيارة بمبلغ : ١٢٠,٠٠٠ ريال ، فإذا كانت قيمة السيارة تنقص كل سنة بمعدل : ٢٠% أوجد قيمتها في السنة السادسة من استعمالها ؟
- ٦ بدأ مصنع لعصير الفواكه عمله بإنتاج ١٠٠ لتر من العصير في الأسبوع على أن يزيد الإنتاج بمعدل ٢٠% كل أسبوع، احسب عدد الأسابيع اللازمة حتى يصل الإنتاج إلى: ١٢,٥٠٠ لتر ثم احسب مجموع الإنتاج الكلي خلال هذه الأسابيع .

### سؤال خاص للجوابين :

- لوحة مربعة الشكل مقسمة إلى  $n$  من المربعات الصغيرة ، كتب في المربعات الأعداد : ١ ، ٢ ، ٤ ، ... على التوالي ، فإذا كان مجموع الأعداد في المربعات الصغيرة يساوي ٥١١ ، أوجد :  
١ عدد المربعات  
٢ أثبت أن :  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

## نهارين إضافية على الدرس السادس : المتسلسلات الحسابية والهندسية المنتهية

### سؤال خاص للجوابين :

لوحة مربعة الشكل مقسمة إلى  $n$  من المربعات الصغيرة ، كتب في المربعات الأعداد : ١ ، ٢ ، ... ، ٤ ، على التوالي ، فإذا كان مجموع الأعداد في المربعات الصغيرة يساوي ٥١١ ، أوجد :

[٢] عدد المربعات      أثبت أن :  $ج_٨ + ١ = ح_٩$

### الحل :

الأعداد المكتوبة على في المربعات على التوالي : ١ ، ٢ ، ٤ ، ...

وهي تمثل متتابعة هندسية فيها :  $١ = ٢$  ،  $٢ = ٤$  .

∴ مجموع الأعداد المكتوبة = ٥١١  $\Leftarrow ج_٨ = ٥١١$  .

### الآن : [١] عدد المربعات :

عدد المربعات = عدد الحدود المكتوبة والتي تمثل متتابعة هندسية مجموعها  $ج_٨ = ٥١١$  .

من مجموع المتسلسلة الهندسية :  $ح_٨ = \frac{(١ - ٢^٨)}{١ - ٢}$

$$\Leftarrow \begin{cases} ١ - ٢^٨ = ٥١١ \Leftarrow \frac{(١ - ٢^٨) \times ١}{١ - ٢} = ٥١١ \Leftarrow \\ ٩ = ٨ \Leftarrow ٢^٨ = ٥١٢ \Leftarrow ٢^٨ = ٥١٢ \Leftarrow ٢^٨ = ٥١٢ \Leftarrow ٩ = ٨ \end{cases}$$

[٢] أثبت أن :  $ج_٨ + ١ = ح_٩$

(١).....  $٢٥٦ = ج_٨ + ١ \Leftarrow ١ - ٢^٨ = ج_٨ \Leftarrow \frac{(١ - ٢^٨)}{١ - ٢} = ج_٨$

(٢).....  $٢٥٦ = ٢^٨ = ج_٨ \Leftarrow ٢^٨ = ج_٨ \Leftarrow ٢^٨ \times ١ = ج_٩$

من (١) و (٢) نجد أن :  $ج_٨ + ١ = ح_٩$



## الدرس السابع : نهاية المتتابعة الغير منتهية

### مثال نهدي :

ادرس سلوك الحد النوني في  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ، حيث :  $a_n = \frac{n}{1+n}$

∴ المتتابعة  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  لا يمكن كتابة كل حدودها ولكن نأخذ فكرة عن سلوكها عند قيم  $n$  الكبيرة .

### حدها الأولى :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

ح.  $\frac{1}{11} = 0.0909$  ، ..... ، وكذلك ح.  $\frac{1}{111} = 0.00909$  ، ..... ، وهكذا .

ونلاحظ أن المتتابعة تقترب من العدد **واحد** كلما زادت قيمة  $n$  . لذلك نتوقع أن تكون

نهاية المتتابعة هي الواحد الصحيح .

( أي أن المتتابعة متقاربة ونهايتها العدد واحد ) ، ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة الغير منتهية

مثال آخر :

اكتب الحدود الأولى للمتتابعة المعطاة ثم توقع نهايتها إن وجدت :

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ حيث : } a_n = \frac{n^2}{1+n^4}$$

الحل :

$$a_1 = \left( \frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{6}{13}, \frac{8}{17}, \dots \right)$$

$$a_2 = \frac{4}{20}, \dots, \text{ وكذلك } a_{1000} = \frac{1}{40004001}$$

وهكذا نلاحظ أن المتتابعة تقترب من العدد  $\frac{1}{6}$  كلما زادت قيمة  $n$  لذلك نتوقع أن

تكون نهاية المتتابعة هي  $\frac{1}{6} \Leftarrow$  المتتابعة تقاربية ، ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة الغير منتهية

### تعريف :

إذا كانت  $\{a_n\}$  متتابعة غير منتهية وكان :  $L$  عدداً حقيقياً بحيث إن المقدار :  $|a_n - L|$  يساوي الصفر أو يقترب أكثر فأكثر من الصفر كلما زادت  $n$  بلا حدود عندئذ نقول إن المتتابعة :  $\{a_n\}$  متقاربة ولها النهاية  $L$  عندما تؤول  $n$  إلى المالا نهاية ونكتب :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

### ملاحظات :

- ١ هذا التعريف يستخدم للتحقق من أن عدداً حقيقياً ما هو نهاية المتتابعة ولا يستخدم لإيجاد نهاية المتتابعة .
- ٢ إذا لم يتحقق الشرط  $|a_n - L|$  يساوي الصفر أو يقترب من الصفر كلما زادت  $n$  فإن المتتابعة ليست متقاربة .
- ٣ إن المتتابعة المتقاربة لها نهاية وحيدة .

### مثال :

تحقق باستخدام التعريف من المتتابعة  $\{a_n\}$  حيث :  $a_n = 3 - \frac{2}{n}$  لها النهاية ٣ .

الحل : لاحظ أن :  $L = 3$

$|a_n - L| = |3 - \frac{2}{n} - 3| = |\frac{2}{n}| = \frac{2}{n}$  ، وهذا المقدار يقترب من الصفر كلما زادت قيم  $n$  بلا حدود .

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

### تعريف :

نقول أن المتتابعة  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  الغير منتهية:

- (أ) متقاربة (تقاربية) إذا كانت لها نهاية ( النهاية موجودة ) .  
(ب) متباعدة (تباعدية) إذا كانت ليس لها نهاية ( النهاية غير موجودة ) .

### نظريات لدراسة نهاية المتتابعات غير المنتهية :

١ المتتابعة  $\{a_n\}$  والتي فيها  $a_n = c$  ، حيث  $c$  ثابت لجميع قيم  $n$  متقاربة ونهايتها تساوي العدد الثابت نفسه . ونكتب :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$

٢  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  صفر

٣  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{b} \right) = \begin{cases} \text{صفر} , & a > b \\ \infty , & a < b \end{cases}$

٤ إذا كانت :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$  ،  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = k$  ، فإن :

$$[أ] \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = l \pm k$$

$$[ب] \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \times b_n) = l \times k$$

$$[ج] \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{l}{k} , \quad k \neq 0 , \quad b_n \neq 0$$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

$$\frac{1-n^5}{3+n^3} = n \quad \text{ادرس تقارب المتتابعة :}$$

الحل :

$$\frac{1-n^5}{3+n^3} \underset{n \rightarrow \infty}{=} n$$

بأخذ  $n$  عامل مشترك

$$\frac{\left(\frac{1}{n} - 5\right)n}{\left(\frac{3}{n} + 3\right)n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} n$$

اختصار  $n$

$$\frac{\left(\frac{1}{n} - 5\right)}{\left(\frac{3}{n} + 3\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} n$$

عدد  $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

$$\frac{\left(\frac{1}{n} - 5\right)}{\left(\frac{3}{n} + 3\right)} \underset{n \rightarrow \infty}{=} n$$

$$\frac{0}{3} = \frac{0}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{=} n$$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n}{n^2 + 4}$

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n}{n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{n}\right)}{\left(1 + \frac{4}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n}\right)}{\left(\frac{4}{n^2} + 1\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3}{1 + 0} = \frac{-2}{1} = -2$$

ملاحظة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

$$\frac{6 + n - n^2}{n^2 + 9n} = n \quad \text{ادرس تقارب المتتابعة :}$$

الحل :

$$\frac{6 + n - n^2}{n^2 + 9n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$$

$$= \frac{\left( \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) n^2}{\left( \frac{9}{n} + 1 \right) n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$= \frac{\left( \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) \cancel{n^2}}{\left( \frac{9}{n} + 1 \right) \cancel{n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$= \frac{\left( \overset{\text{صفر}}{\cancel{\frac{6}{n^2}}} + \overset{\text{صفر}}{\cancel{\frac{1}{n}}} - \overset{\text{صفر}}{\cancel{\frac{1}{n}}} \right)}{\left( \overset{\text{صفر}}{\cancel{\frac{9}{n}}} + 1 \right)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim}$$

$$= \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\text{صفر}}{1} = \text{صفر}$$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

### ملاحظة :

في مثل المسائل السابقة لاستنتاج نهاية المتتابعة إذا كانت كسرية بسطها كثيرة حدود ومقامها كثيرة حدود فإننا نأخذ  $n$  بأكبر درجة من المقام عامل في البسط والمقام أو نقسم البسط والمقام على  $n$  بأكبر درجة موجودة في المقام مع الاستفادة من النظريتين التاليتين :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{عدد}}{n} = \text{صفر} \quad (ب) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} + c = \infty$$

### ويمكن الاستفادة من النظرية التالية لحل مثل هذه المسائل :

في المتتابعة الكسرية التي بسطها ومقامها كثيرة حدود فإن نهايتها لا تخرج عن الحالات التالية :

Ⓐ إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\text{معامل } n \text{ بأكبر درجة في البسط}}{\text{معامل } n \text{ بأكبر درجة في المقام}}$

Ⓑ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \text{صفر}$

Ⓒ إذا كانت درجة البسط < درجة المقام فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \infty$



## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

### أمثلة إضافية :

مثال :

$$\text{ادرس تقارب المتتابعة : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + n - n^2}{n^6 + n^5} = 0$$

الحل :

$$\frac{0}{0} = \frac{12 + n - n^2}{n^6 + n^5} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + n - n^2}{n^6 + n^5}$$

لأن درجة البسط = درجة المقام

مثال :

$$\text{ادرس تقارب المتتابعة : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^4}{n^3 + n^2} = 0$$

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^4}{n^3 + n^2} = 0$$

لأن درجة البسط < درجة المقام

مثال :

$$\text{ادرس تقارب المتتابعة : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^4}{n^8 + n^2} = 0$$

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^4}{n^8 + n^2} = 0 \text{ صفر}$$

لأن درجة البسط > درجة المقام

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

أوجد :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p$  ، حيث :  $p = 7$

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \lim_{n \rightarrow \infty} n^7 = \infty$$

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3 + 8}$

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3 + 8} = 0 = \text{صفر}$$

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{8} \right)^n$

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{8} \right)^n = 0 = \text{صفر}$$

نظرية :

الدالة الأسية على الصورة :  $\frac{1}{b}$  إذا كانت :  $p > b$  ، فإن نهايتها = صفر

وإذا كان :  $p < b$  ، فإن نهايتها =  $\infty$

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

**مثال :**

$$\frac{{}^n 9 \times 5 + {}^{1+n} 7 \times 3}{{}^{1+n} 9 \times 4 - {}^n 7 \times 2} = \uparrow$$

ادرس تقارب المتتابعة :

**الحل :**

**ملاحظة :**

في مثل هذه المسائل لإيجاد النهاية نقسم كل حد في البسط والمقام على أكبر أساس مرفوع للأس  $n$ .

$$\frac{{}^n 9 \times 5 + {}^{1+n} 7 \times 3}{{}^{1+n} 9 \times 4 - {}^n 7 \times 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\text{نها}}{\text{نها}} = \uparrow$$

$$\frac{{}^n 9 \times 5 + {}^n 7 \times 7 \times 3}{{}^n 9 \times 9 \times 4 - {}^n 7 \times 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\text{نها}}{\text{نها}} =$$

لاحظ :  ${}^{1+n} 9 = {}^n 9 \times 9$

$$\frac{{}^n 9 \times 5 + {}^n 7 \times 21}{{}^n 9 \times 36 - {}^n 7 \times 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\text{نها}}{\text{نها}} =$$

$$\frac{\cancel{{}^n \left( \frac{9}{9} \right)} \times 5 + \cancel{{}^n \left( \frac{7}{9} \right)} \times 21}{\cancel{{}^n \left( \frac{9}{9} \right)} \times 36 - \cancel{{}^n \left( \frac{7}{9} \right)} \times 2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\text{نها}}{\text{نها}} =$$

صفر

$$\therefore \frac{\text{نها}}{36 - \frac{0}{9}} = \frac{0}{36} = 0 \quad \therefore \text{المتتابعة تقاربية}$$

الدالة الأسية على الصورة :  $\frac{1}{b^p}$  إذا كانت :  $p > b$  ، فإن نهايتها = صفر ،  
وإذا كان :  $p < b$  ، فإن نهايتها =  $\infty$  .

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$  ، حيث :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$

وادرس تقاربها .

الحل :

**ملاحظة :** المتتابعة الجذرية نضرب البسط والمقام في مرافق الجذر .

$$\sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \times \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\cancel{\sqrt{n}} - \cancel{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} =$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0$$

$$\leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$$

**∴ المتتابعة تقاربية**

## الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتتابعة وأوجد نهايتها :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n})$

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$$

واضح أن المتتابعة تأخذ القيمتين : 1 ، 1 - بالتناوب ولا تثبت على أحدهما .

⇐ المتتابعة تباعدية وليس لها نهاية .

اللمحظة : أن شرط التقارب أن تكون النهاية وحيدة .

### أخيراً هوفي خواص اللانهاية ∞ :

$$\boxed{2} \quad \frac{\text{أي عدد}}{\text{صفر}} = \infty \text{ أو غير معرف}$$

$$\boxed{1} \quad \frac{\text{أي عدد}}{\infty} = \text{صفر}$$

$$\boxed{4} \quad \infty \pm \text{أي عدد} = \infty \pm$$

$$\boxed{3} \quad \infty = \frac{\infty}{\text{أي عدد}}$$

$$\boxed{6} \quad \infty \pm \times \text{عدد سالب} = \mp \infty$$

$$\boxed{5} \quad \infty \pm \times \text{عدد موجب} = \pm \infty$$

$$\boxed{7} \quad \infty = \sqrt[n]{\infty}$$

## نهارين على الدرس السابع : نهاية المتتابعة غير منتهية

ادرس تقارب المتتابعات التالية وأوجد نهايتها:

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 5 -}{\sqrt{2} \times 4 - 1 + \sqrt{2} \times 3} = \sqrt{2} \quad [1]$$

$$\frac{23 - \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 4}{\sqrt{2} + \sqrt{2} \times 7} = \sqrt{2} \quad [2]$$

$$\frac{8 + \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 5}{\sqrt{2} + \sqrt{2} \times 2} = \sqrt{2} \quad [3]$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{9 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad [4]$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad [5]$$

### مسائل للجوابين :

$$\frac{(3 - \sqrt{2}) + \dots + 9 + 5 + 1}{(\sqrt{2} + 3) + \dots + 11 + 8 + 5} = \sqrt{2} \quad [1]$$

$$[2] \text{ ادرس تقارب المتتابعة : } \sqrt{2} = (\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots)$$

## حل : نهارين على الدرس السابق : نهاية المتتابعة غير

### منتهية

#### مسائل الجاوين :

$$\boxed{1} \quad \text{ادرس تقارب المتتابعة لـ } n = \frac{(3-n) + \dots + 9 + 5 + 1}{(2+n) + \dots + 11 + 8 + 5}$$

#### الحل :

نلاحظ أن البسط :  $(3-n) + \dots + 9 + 5 + 1$

يمثل متسلسلة حسابية الحد العام لها :  $u_n = (3-n)$

كذلك نلاحظ أن المقام :  $(1+n) + \dots + 11 + 8 + 5$

يمثل متسلسلة حسابية الحد العام لها :  $u_n = (2+n)$

$$\therefore u_n = \frac{3-n}{2+n}$$

$$\Leftarrow u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3-n}{2+n} = \frac{-1}{1} = -1$$

لأن درجة البسط = درجة المقام

$\Leftarrow$  المتتابعة تقاربية .

## حل : نهارين على الدرس السابق : نهاية المتتابعة غير

### منتهية

### مسائل الجاوبين :

٢ ادرس تقارب المتتابعة :  $p_n = ( \dots , 0,004 , 0,04 , 0,4 )$

### الحل :

المتابعة على الصورة :  $u_n = ( \dots , \frac{4}{1000} , \frac{4}{100} , \frac{4}{10} )$

وهي تمثل متتابعة هندسية :  $p = 0,4$  ،  $r = 0,1$

من الحد العام نجد أن :

$$u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \times \frac{4}{10}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \times \frac{4}{10} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 = \text{صفر}$$

بالاستفادة من النظريات في صفحة ( ٨٢ )

∴ المتتابعة تقاربية .



## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

### تعريف :

إذا كانت  $\{a_n\}$  متتابة غير منتهية فإن الصيغة :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$$

تسمى متسلسلة غير منتهية .

إذا كان لدينا المتتابة  $\{a_n\}$  حيث  $a_n = \frac{1}{n^3}$  فما هي المتسلسلة غير المنتهية  $S$  والتي حدودها هي :  $a_1, a_2, a_3, \dots$  ؟

### الحل :

لدينا :  $a_1 = \frac{1}{1^3}, a_2 = \frac{1}{2^3}, a_3 = \frac{1}{3^3}, \dots$

$$\therefore S = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = S$$

### ملاحظات :

- 1 المتسلسلة اللانهائية هي كالمتتابة اللانهائية في كونها ليس لها حد آخر .
- 2 المتسلسلة اللانهائية قد تكون حسابية أو هندسية أو لاحسابية ولا هندسية .

### الآن :

يتبادر إلى الذهن سؤال هل المتسلسلة اللانهائية لها مجموع وكيف نوجده ؟

والإجابة على هذا السؤال : يعتمد على نوع المتسلسلة ، وطبيعة عناصرها حيث في بعض الأحيان نستطيع أن نوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية بينما في بعض الأحيان يكون الأمر مستحيلاً ، وكيف نحدد ذلك هذا ما سندرسه في الخطوات القادمة .

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

أولاً : المتسلسلة الحسابية غير المنتهية :

إذا كانت المتسلسلة غير المنتهية حسابية فهي متباعدة وليس لها مجموع .

نقرا أن : المتسلسلة الحسابية هي متسلسلة من الدرجة الأولى على الصورة :

$ج + هـ$  ومعامل  $هـ$  هو أساس المتتابعة الحسابية .

مثال :

أوجد إن أمكن :  $ج = \sum_{n=1}^{\infty} (٢ + ١)$  .

الحل :

$$ج = \sum_{n=1}^{\infty} (٢ + ١) = (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، .....)$$

واضح أن المتتابعة حسابية لانهاية .

⇐ متباعدة وليس لها مجموع .

∴ المتسلسلة يستحيل إيجاد مجموعها .

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

### ثانياً : المتسلسلة الهندسية غير المنتهية :

إذا كانت المتسلسلة غير المنتهية هندسية فلها حالتان :

Ⓐ إذا كانت  $|r| > 1$  ، فإن المتسلسلة تكون تقاربية و مجموعها  $J = \frac{p}{1-r}$  .

Ⓑ إذا كانت  $|r| \leq 1$  ، فإن المتسلسلة تكون تباعدية وليس لها مجموع .

### تعريف :

ليكن لدينا المتسلسلة  $J = \sum_{n=0}^{\infty} p \times r^{n-1}$  ، حيث  $p$  ،  $r$  ثابتان عندئذ : نسمي  $J$  متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول  $= p$  ، وأساسها  $= r$  .

### للتسك أن :

المتسلسلة الهندسية دالة أسية فما عليك إلا أن تضعها على الصورة :  $p \times r^{n-1}$  لكي تحدد الأساس والحد الأول .

### من خصائص الأسس :

①  $r^a \times r^b = r^{a+b}$

②  $r^a \times r^b = r^{a-b}$

③  $r^{\left(\frac{a}{b}\right)} = r^{-\left(\frac{1}{b}\right)}$

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

### مثال :

حدد نوع المتسلسلة وأوجد أساسها وحدها الأول :

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

### الحل :

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2}$$

وهي صورة متسلسلة هندسية لانهاية حدها الأول  $p = \frac{1}{2}$  ، وأساسها  $r = \frac{1}{2}$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

وهي صورة متسلسلة هندسية لانهاية حدها الأول  $p = 2$  ، وأساسها  $r = \frac{1}{5}$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

وهي صورة متسلسلة هندسية لانهاية حدها الأول  $p = \frac{1}{4}$  ، وأساسها  $r = \frac{1}{4}$

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة الهندسية التالية وأوجد المجموع إن أمكن :

$$ج = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

الحل :

$$\textcircled{1} ج = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

نضعها على الصورة :  $1 \times r^{n-1}$

$$\leftarrow ج = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6} \times 3 \times \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\leftarrow ر = \frac{1}{6} \leftarrow |ر| = \left|\frac{1}{6}\right| < 1$$

∴ المتسلسلة الهندسية تقاربية ولها مجموع ،  $م = \frac{3}{5}$

$$\therefore > = \frac{1}{1-ر}$$

$$\leftarrow > = \frac{\frac{3}{6}}{\frac{1}{6} - 1} = \frac{\frac{3}{6}}{-\frac{5}{6}} = -3$$

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

: مثال

ادرس تقارب المتسلسلات الهندسية التالية وأوجد المجموع إن أمكن :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

### الحل :

$$1 - \sum_{i=1}^n x_i = 1 - \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{①}$$

المتسلسلة الآن على الصورة العامة وأساسها:  $\checkmark = 5 < 1$

∴ التسلسلة الهندسية تباعدية وليس لها مجموع .

②

$$\overset{1}{\sim} \left( \frac{1}{3} - \right) \times \left( \frac{1}{3} - \right) \times \left( \frac{1}{3} - \right) \sum_{i=1}^8 = \overset{2}{\sim} \left( \frac{1}{3} - \right) \times \left( \frac{1}{3} - \right) \sum_{i=1}^8 = \overset{1+2}{\sim} \left( \frac{1}{3} - \right) \sum_{i=1}^8 = \gamma$$

$$\left(\frac{1}{3} - \right) \times \left(\frac{1}{9} - \right) \sum_{n=1}^{\infty} =$$

$\therefore \text{تقاربية ولها مجموع} \quad 1 > |r| \Leftarrow \frac{1}{3} = r, \quad \frac{1}{9} = p$

$$\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right) - 1} = 2$$

## نصبيقات على درس : نهاية المتسلسلة غير منتهية

١ ادرس تقارب المتسلسلات الهندسية التالية وأوجد المجموع إن أمكن :

$$\textcircled{1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n \times \frac{1}{7} \quad \textcircled{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \textcircled{3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times 3^{-n}$$

٢ متتابعة هندسية غير منتهية كل حد من حدودها سبعة أمثال مجموع الحدود التالية له ، فإذا كان :  $u_3 = \frac{3}{8}$  ، فأوجد هذه المتتابعة ، وأوجد مجموعها إن أمكن .

٣ اكتب المجموع التالي :  $(0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots)$  على صورة :  $\frac{a}{b}$

٤ إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متسلسلة هندسية لانهاية يساوي :  $\frac{3}{8}$  ، وكان مجموعها يساوي  $\frac{1}{4}$  أوجد كلاً من :

١ أساس المتسلسلة

٢ الحد الأول .

## نظريات على درس : نهاية المتسلسلة غير منتهية

٢ متتابعة هندسية غير منتهية كل حد من حدودها سبعة أمثال مجموع الحدود التالية له ، فإذا كان :  $ح = \frac{3}{8}$  ، فأوجد هذه المتتابعة ، وأوجد مجموعها إن أمكن .  
الحل :

∴ كل حد من حدود المتتابعة الهندسية سبعة أمثال مجموع الحدود التالية له .

$$ج = ٧ = ( ..... + ٣ر٧ + ٢ر٧ + ر٧ ) \times ٧ = ٧ \Leftarrow$$

$$ج = ٧ = ..... (١) \Leftarrow$$

$$حيث : ج = ( ..... + ٣ر٧ + ٢ر٧ + ر٧ )$$

$$نعلم أن  $ح = \frac{\text{الحد الأول}}{ر - ١} = ح = \frac{٧}{ر - ١} \dots\dots\dots (٢)$$$

بالتعويض من (١) في (٢) نجد أن :

$$\frac{٧}{ر - ١} = \frac{٧}{ر - ١} \times ٧ = ٧$$

$$٧ = ر - ١ \Leftarrow ٧ + ١ = ر$$

$$٨ = ر \Leftarrow$$

$$\frac{١}{٨} = ر \Leftarrow$$

$$\underline{\text{الآن :}} \quad ح = \frac{3}{8} \Leftarrow ٣ = ح \times ٨ \Leftarrow ٣ = \left(\frac{١}{٨}\right) \times ٨ \Leftarrow ٣ = ١ \Leftarrow ٢٤ = ٣ \times ٨$$

∴ المتتابعة : ( ..... ،  $\frac{3}{8}$  ، ٣ ، ٢٤ )

الآن :

$$\therefore |ر| = \left|\frac{١}{٨}\right| > ١ \Leftarrow \text{تقاربية ولها مجموع}$$

$$ح = \frac{٢٤}{\frac{١}{٨} - ١} = \frac{١٩٢}{٧}$$



## نظريات على درس : نهاية المتسلسلة غير منتهية

٣ اكتب المجموع التالي : ( ... ، ٠,٠٠٠٧ ، ٠,٠٠٧ ، ٠,٠٧ + ٠,٧ )

على صورة :  $\frac{1}{b}$

الحل :

المجموع : ( ... ، ٠,٠٠٠٧ ، ٠,٠٠٧ ، ٠,٠٧ + ٠,٧ )

يمثل متسلسلة هندسية فيها :  $\frac{1}{10} = r$  ،  $\frac{7}{10} = a$

$$\therefore \frac{1}{r-1} = \frac{1}{\frac{1}{10}-1}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{1}{10}-1} = \frac{7}{9} \Leftarrow$$

$$\therefore \frac{7}{9} = ( \dots ، ٠,٠٠٠٧ ، ٠,٠٠٧ ، ٠,٠٧ + ٠,٧ )$$

## نظريات على درس : نهاية المتسلسلة غير منتهية

④ إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متسلسلة هندسية لانهائية يساوي  $\frac{3}{8}$  ، وكان مجموعها يساوي  $\frac{1}{4}$  أوجد كلاً من :

① أساس المتسلسلة      ② الحد الأول .

الحل :

∴ مجموع الحدين الأول والثاني من متسلسلة هندسية لانهائية يساوي  $\frac{3}{8}$  :

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} &= r + r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} = r(1 + r) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} = r + r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{3}{8} = r - r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{8} = r - r^2 \quad \text{..... (1)} \end{aligned}$$

∴ مجموع المتسلسلة =  $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4} = \frac{r}{1-r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{r}{1-r} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - r = 4r \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 5r \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{5} \quad \text{..... (2)}$$

بمساواة : (1) و (2) نجد أن :

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{5}{25} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{r}{1-r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

بحل المعادلة سنجد قيمتين لـ  $r$  هي :  $\frac{3}{4} = r$  ،  $\frac{1}{4} = r$  .

و عندها سنجد قيمتين :  $r = \frac{1}{4}$  ،  $r = \frac{3}{4}$

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

نتابع استكمال الدرس بدراسة الحالات الباقية ونذكر أننا درسنا حالتين الأولى إذا كانت المتسلسلة حسابية وقلنا أنها دائماً تباعدية وليس لها مجموع ، كذلك درسنا الحالة الثانية المتسلسلة الهندسية وقلنا أن لها حالتين تتحدد بأساس المتسلسلة .

**الآن:** إذا كانت المتسلسلة لاحسابية ولاهندسية فلجأ إلى اختبار التباعد ولكن أولاً سنعطي النظرية التالية :

نظرية :

إذا كانت المتسلسلة:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \text{ج}$  متقاربة ، فإن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{صفرًا}$

ومن النظرية نستطيع أن نستنتج نصاً لاختبار التباعد كالتالي :

**ثالثاً : اختبار التباعد وينص على الآتي :**

{ إذا كانت  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \text{صفرًا}$  أو ( غير موجودة ) فإن :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  تباعدية }

بصورة نصية :

( إذا كانت نهاية المتتابعة لا تساوي الصفر فإن المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع )

ملاحظة هامة :

عكس النظرية ليس من الضروري صحته أي أنه قد تكون :  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{الصفر}$  ، ومع ذلك :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  متباعدة .

**خاتمة :**

نستخدم اختبار التباعد مباشرة إذا كان السؤال لمتسلسلة كسرية .

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

أثبت أن المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n}$  متباعدة .

الحل :

∴ المتسلسلة كسرية نلجأ إلى اختبار التباعد .

النسبة :

أنا في اختبار التباعد ندرس نهاية المتابعة ومن ثم نستنتج تقارب أو تباعد مجموعها أي المتسلسلة .

الآن :

$$n \rightarrow \infty \quad \frac{n}{1+n} = 1 \Leftarrow \text{النهاية لا تساوي الصفر} .$$

∴ المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع .

مثال :

ادرس تقارب تقارب المتسلسلة غير المنتهية التالية :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n^3}{1-2n^8}$

الحل :

$$\frac{3}{8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n^3}{1-2n^8}$$

∴ نهاية المتابعة لا تساوي الصفر  $\Leftarrow$  المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع .

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

أثبت أن المتسلسلة :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3}{1+n^5} = >$  متباعدة .

الحل :

$$\begin{aligned} \left( \frac{n^2}{1+n^5} + \frac{n^3}{1+n^5} \right)_{n \rightarrow \infty} &= \frac{n^2 + n^3}{1+n^5} \\ &= \left( \left( \frac{n^2}{n^5} \right) \times \frac{1}{1} + \left( \frac{n^3}{n^5} \right) \times \frac{1}{1} \right)_{n \rightarrow \infty} = \\ &= \frac{1}{0} \end{aligned}$$

∴ نهاية المتتابعة لا تساوي الصفر  $\Leftrightarrow$  المتسلسلة تباعدية وليس لها مجموع .

مثال :

أثبت أن المتسلسلة :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = >$  متباعدة .

الحل :

$$\left( \frac{1}{n} \right)_{n \rightarrow \infty} = \text{صفرًا}$$

في مثل هذه الحالة التي تكون فيها نهاية المتتابعة تساوي الصفر لانستطيع أن نحدد تقارب أو تباعد مجموعها أي يفشل اختبار التباعد فنلجأ إلى متتابعة المجاميع الجزئية ، وهي الحالة الأخيرة من دراسة المتسلسلات غير المنتهية .

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

### رابعاً : متابعة المجاميع الجزئية :

إذا كانت المتسلسلة ليست حسابية ولا هندسية ولم ينطبق عليها اختبار التباعد ففي هذه الحالة نستخدم متابعة المجاميع الجزئية وهي حالة عامة عن طريقها نستطيع أن ندرس جميع المتسلسلات .

### تعريف :

المتابعة غير المنتهية  $\{j_n\}$  حيث :  $j_n = \sum_{i=1}^n p_i$  تسمى متابعة المجاميع الجزئية حيث :  
 $j_1 = p_1$  ،  $j_2 = p_1 + p_2$  ،  $j_3 = p_1 + p_2 + p_3$  ،  $j_4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$  ، .....  
..... ،  $j_n = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n$

### أه أن :

$j_n$  : هي مجموع الحدود الأولى من  $j$  والتي عددها  $n$  ويسمى بالمجموع الجزئي للمتسلسلة  $j$  .

### وهناك طريقة ثان لدراستها كالتالي :

① نوجد المجاميع الجزئية ونرى سير المتابعة ثم نحدد هل هي تقاربية أم تباعدية .

② نستنتج الحد العام وندرس نهاية المتابعة فإذا كانت :

✎ إذا كانت متابعة المجاميع الجزئية  $\{j_n\}$  متقاربة ونهايتها  $l$  ، فإن المتسلسلة :  $j = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$  ، تقاربية ومجموعها العدد الحقيقي  $l$  .

✎ إذا كانت متابعة المجاميع الجزئية  $\{j_n\}$  تباعدية وليس لها نهاية ، فإن المتسلسلة :  $j = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$  ، تباعدية ولا يمكن إيجاد مجموعها .

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

ادرس تقارب المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  .

الحل :

واضح :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  صفراً (  $\therefore$  لا ينطبق عليها اختبار التباعد ) .

بينما نجد أن :  $1 = 1$  ج ١

$$ج ٢ \quad \frac{2}{2} = \frac{1}{2} + 1 = 1$$

$$ج ٣ \quad \frac{11}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 1$$

$$\therefore ح ٤ = ( 1 , \frac{2}{2} , \frac{11}{4} , \dots )$$

وهكذا كلما زادت قيمة  $n$  تزداد  $ج n$  وبالتالي المتتابعة  $\{ ج n \}$  متباعدة .

⇐ المتسلسلة ج متباعدة ، وليس لها مجموع .

## الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير منتهية

مثال :

أثبت أن المتسلسلة :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2} >$  متقاربة وأوجد مجموعها .

الحل :

$$\text{اعلم أن : } \frac{1}{(1+n)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n+1)^2}$$

$$\text{ج}_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\text{ج}_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{20}$$

$$\text{ج}_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots = \text{ح}_n$$

$$\therefore \text{ح}_n = \left(\frac{1}{1+n} - 1\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ح}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+n} - 1\right) = -1$$

∴ المتتابعة تقاربيه ⇐ المتسلسلة تقاربيه ومجموعها = 1 .



## نصبيقات متنوغة على الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة

### غير منتهية

١ أوجد الحد الأول للمتسلسلة الهندسية اللانهاية التي أساسها :  $-\frac{1}{3}$  ، ومجموع حدودها يساوي :  $\frac{3}{4}$  .

٢ أوجد كلاً مما يلي :

أ  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-n}{1+n} \right)^n$       ب  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-3}{1-n} \right)^n$

٣ سقطت كرة مطاوية من ارتفاع مترين ، وكانت ترتد دائماً إلى  $\frac{1}{4}$  الارتفاع الذي سقطت منه ، أوجد مجموع المسافات التي قطعها الكرة قبل سكونها .

٤ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سم ، تم التوصيل بين منتصفات أضلاعه بقطع مستقيمة لتشكيل مثلث آخر متساوي الأضلاع ، فإذا استمر هذا النمط مع المثلثات المركزية إلى ما لا نهاية فجد مجموع مساحات المثلثات الناتجة .

## حل : تطبيقات متنوعة على الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير المنتهية

④ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سم ، تم التوصيل بين منتصفات أضلاعه بقطع مستقيمة لتشكيل مثلث آخر متساوي الأضلاع ، فإذا استمر هذا النمط مع المثلثات المركزية إلى ما لا نهاية فجد مجموع مساحات المثلثات الناتجة .

الحل :

نعلم أن مساحة المثلث المتطابق الأضلاع =  $\frac{\sqrt{3}}{4} L^2$  ، حيث :  $L$  طول الضلع .

$$\text{المثلث الأول طول ضلعه } 8 \Rightarrow \text{مساحته} = \frac{\sqrt{3}}{4} (8)^2 = \sqrt{3} \times 16$$

$$\text{بعد التنصيف سيكون طول ضلع المثلث الثاني } 4 \Rightarrow \text{مساحته} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 = \sqrt{3} \times 4$$

$$\text{بعد التنصيف سيكون طول ضلع المثلث الثاني } 2 \Rightarrow \text{مساحته} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \sqrt{3}$$

∴ مجموع مساحة المثلثات تكون متسلسلة حدودها :  $(\dots + \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 4 + \sqrt{3} \times 16 + \dots)$

وسنلاحظ أن المتسلسلة هندسية وأساسها =  $\frac{1}{4}$

$$\therefore \text{مجموعها} : > = \frac{\sqrt{3} \times 16}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\sqrt{3} \times 16}{-\frac{3}{4}} = -\frac{64\sqrt{3}}{3}$$

## حل : تطبيقات متنوعة على الدرس الثامن : نهاية المتسلسلة غير المنتهية

### مثال :

طول ضلع مربع ٨ سم ، فإذا كان المربع الثاني رؤوسه هي منتصفات أضلاع المربع الأول ، واستمرت هذه العملية كما هو موضح في الشكل .

- ١ اكتب أطوال أضلاع أول أربعة مربعات ؟
- ٢ اكتب الفقرة الأولى على صورة متتابعة ؟
- ٣ أوجد مجموع أطوال أضلاع المربعات الأربعة ؟
- ٤ استنتج صيغة بدلالة الحد الأول وعدد الحدود لمجموع أطوال أضلاع أول  $n$  مربعات ؟

### الحل :

١ أطوال المربعات الأربعة الأولى بالتتابع هي : ( ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ )

٢ الفقرة الأولى على صورة متتابعة : ( ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ،  $\frac{1}{2}$  ، ... )

٣ مجموع أطوال أضلاع المربعات الأربعة = ١٥ .

٤ صيغة بدلالة الحد الأول وعدد الحدود لمجموع أطوال أضلاع أول  $n$  مربعات :

واضح أن المتتابعة هندسية حدها الأول = ٨ ، وأساسها =  $\frac{1}{2}$  .

ومجموع  $n$  حداً منها هو :  $16 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 16$